

Exercice 1

6 points

1) Le point M appartient au segment $[AB]$, donc $AB = AM + MB$, d'où $MB = AB - AM = 8 - x$:

$$MB = 8 - x.$$

$AMNP$ est un carré de côté $AM = x$, donc $AP = x$. Le point P appartient au segment $[AD]$ et $AD = BC = 10$ ($ABCD$ est un rectangle), d'où

$$PD = AD - AP = 10 - x.$$

2) **Zone claire** (Amélie) : rectangles $PNQD$ et $MBRN$.

- $PNQD$ a pour dimensions $PN = x$ et $PD = 10 - x$: son aire vaut $x(10 - x) = 10x - x^2$.
- $MBRN$ a pour dimensions $MB = 8 - x$ et $MN = x$: son aire vaut $(8 - x)x = 8x - x^2$.

$$\mathcal{A}_{\text{claire}} = 10x - x^2 + 8x - x^2 = -2x^2 + 18x.$$

Zone foncée (Wilson) : carré $AMNP$ et rectangle $NRCQ$.

- $AMNP$ est un carré de côté x : son aire vaut x^2 .
- $NRCQ$ a pour dimensions $NR = MB = 8 - x$ et $NQ = PD = 10 - x$: son aire vaut $(8 - x)(10 - x) = 80 - 8x - 10x + x^2 = x^2 - 18x + 80$.

$$\mathcal{A}_{\text{foncée}} = x^2 + x^2 - 18x + 80 = 2x^2 - 18x + 80.$$

Vérification : $\mathcal{A}_{\text{claire}} + \mathcal{A}_{\text{foncée}} = 80 = 8 \times 10$, l'aire du panneau.

3) Le problème demande que $\mathcal{A}_{\text{claire}} \geq \mathcal{A}_{\text{foncée}}$, avec $x \in [0; 8]$:

$$\begin{aligned} -2x^2 + 18x &\geq 2x^2 - 18x + 80 &\iff 0 &\geq 4x^2 - 36x + 80 & \text{(on ajoute } 2x^2 - 18x) \\ &&\iff 0 &\geq x^2 - 9x + 20 & \text{(on divise par } 4 > 0) \end{aligned}$$

Résoudre le problème revient donc bien à résoudre $x^2 - 9x + 20 \leq 0$ sur $[0; 8]$.

4) a. $x^2 - 9x + 20$ est un trinôme avec $a = 1$, $b = -9$, $c = 20$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \times 1 \times 20 = 81 - 80 = 1 > 0.$$

L'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - 1}{2} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 + 1}{2} = 5.$$

$$\mathcal{S} = \{4; 5\}$$

Vérification : $4^2 - 9 \times 4 + 20 = 16 - 36 + 20 = 0$ et $5^2 - 9 \times 5 + 20 = 25 - 45 + 20 = 0$.

b. Le trinôme est du signe de $a = 1 > 0$ à l'extérieur des racines et du signe contraire entre les racines. Sur $[0; 8]$:

x	0	4	5	8
$x^2 - 9x + 20$		+	-	+

Donc $x^2 - 9x + 20 \leq 0 \iff x \in [4; 5]$, intervalle contenu dans $[0; 8]$.

Conclusion : la zone d'Amélie a une aire supérieure ou égale à celle de la zone de Wilson si et seulement si

$$AM \in [4; 5],$$

c'est-à-dire lorsque le point M est situé entre 4 et 5 mètres du point A sur le segment $[AB]$.

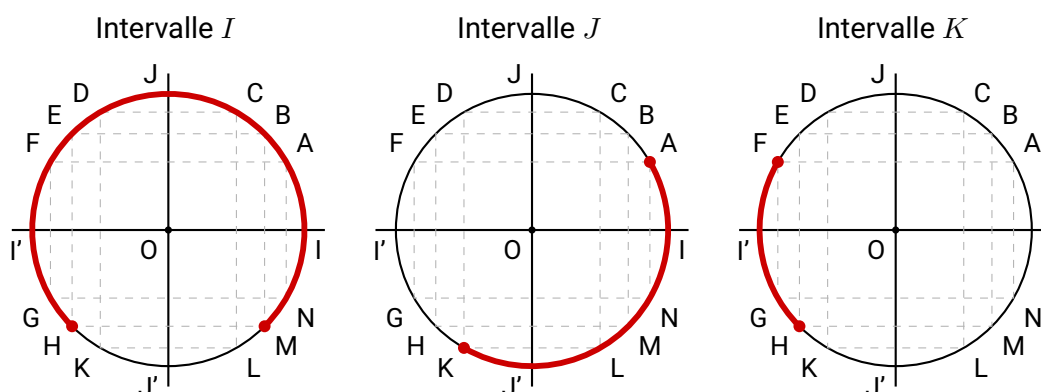
Vérification : pour $x = 4,5$, $\mathcal{A}_{\text{claire}} = 40,5 \geq \mathcal{A}_{\text{foncée}} = 39,5$; pour $x = 2$, $\mathcal{A}_{\text{claire}} = 28 < \mathcal{A}_{\text{foncée}} = 52$; pour $x = 4$, les deux aires valent 40.

Exercice 2

9 points + bonus

1) On repère chaque borne par le point du cercle qui lui est associé, en se ramenant si besoin à $] -\pi; \pi]$, puis on parcourt le cercle dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre) de la borne gauche à la borne droite.

- $I : -\frac{\pi}{4}$ correspond à M et $\frac{5\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi$ correspond à H . L'arc va de M à H en passant par I, J et I' (longueur $\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$, les trois quarts du cercle).
- $J : \frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi$ correspond à K et $\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$ correspond à A . L'arc va de K à A en passant par J' et I (longueur $\frac{13\pi}{6} - \frac{8\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$).
- $K : -\frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} - 2\pi$ correspond à F et $-\frac{3\pi}{4}$ correspond à H . L'arc va de F à H en passant par I' et G (longueur $-\frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$).



2) Pour tout réel x , $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, donc

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Ainsi $\cos(x) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ou $\cos(x) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. Or $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(x) \geq 0$:

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3) De même, pour tout réel x :

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}.$$

Donc $\sin(x) = \frac{\sqrt{24}}{5}$ ou $\sin(x) = -\frac{\sqrt{24}}{5}$, avec $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$.

Or $x \in [-\pi; 0]$: le point associé est sur le demi-cercle inférieur, donc $\sin(x) \leq 0$:

$$\sin(x) = -\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

4) a. On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Sur le cercle, deux points ont pour abscisse $\frac{\sqrt{2}}{2}$: B (associé à $\frac{\pi}{4}$) et son symétrique par rapport à l'axe des abscisses, M (associé à $-\frac{\pi}{4}$). Ces deux réels sont dans $]-\pi; \pi]$:

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}.$$

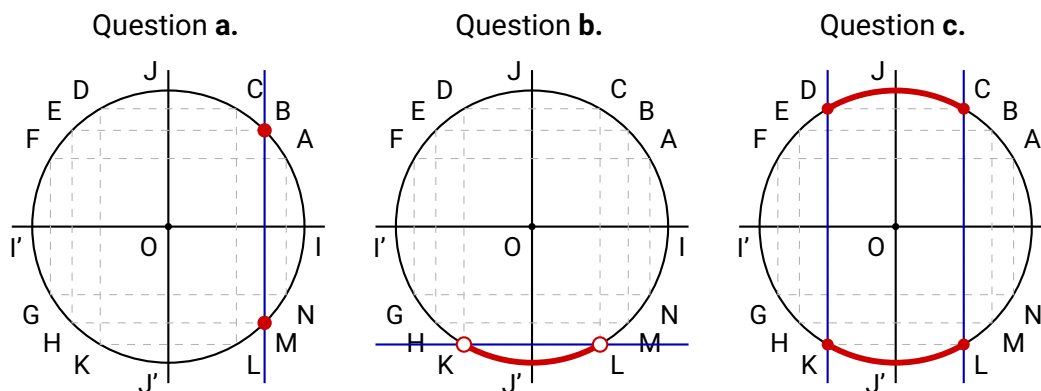
b. $2\sin(x) + \sqrt{3} < 0 \iff 2\sin(x) < -\sqrt{3} \iff \sin(x) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les points du cercle d'ordonnée $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont K (associé à $-\frac{2\pi}{3}$) et L (associé à $-\frac{\pi}{3}$). Les points d'ordonnée strictement inférieure sont ceux de l'arc situé sous la droite (KL) , bornes exclues :

$$\mathcal{S} = \left]-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right[.$$

c. Les points d'abscisse $\frac{1}{2}$ sont $C\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $L\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; ceux d'abscisse $-\frac{1}{2}$ sont $D\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $K\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$. Les points dont l'abscisse est comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ (bornes incluses) sont ceux des arcs de C à D et de K à L , qui sont situés entre les droites (CL) et (DK) :

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right].$$



Points pleins : bornes incluses; points creux : bornes exclues.

5) On utilise les formules des angles associés : pour tout réel x ,

$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x), \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos(x), \\ \cos(\pi - x) &= -\cos(x), \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin(x).\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}A &= -\sin(x) - 3 \times (-\cos(x)) - 4 \times (-\cos(x)) + \sin(x) \\ &= -\sin(x) + 3\cos(x) + 4\cos(x) + \sin(x)\end{aligned}$$

$$\boxed{A = 7\cos(x)}.$$

Vérification : pour $x = 0$, $A = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 4\cos(\pi) + \sin(2\pi) = 0 + 3 + 4 + 0 = 7 = 7\cos(0)$.

6) Bonus. On pose $X = \sin(x)$. L'équation devient $-2X^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})X + \frac{\sqrt{6}}{2} = 0$, trinôme avec $a = -2$, $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $c = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

$$\Delta = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 - 4 \times (-2) \times \frac{\sqrt{6}}{2} = 3 - 2\sqrt{6} + 2 + 4\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6}.$$

On remarque que $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$, donc $\sqrt{\Delta} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$. Les deux solutions sont :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{2 \times (-2)} = \frac{-2\sqrt{3}}{-4} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{2 \times (-2)} = \frac{2\sqrt{2}}{-4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On revient à $x \in]-\pi; \pi]$:

- $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ (points C et D);
- $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = -\frac{\pi}{4} \text{ ou } x = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$ (points M et H).

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}}$$

Vérification : pour $x = \frac{\pi}{3}$, $-2 \times \frac{3}{4} + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = 0$.

Exercice 3

5 points

1) On applique la relation $u_{n+1} = -2u_n + 3n$ successivement avec $n = 0, 1, 2$ puis 3 :

$$u_1 = -2u_0 + 3 \times 0 = -2 \times 5 + 0 = \boxed{-10},$$

$$u_2 = -2u_1 + 3 \times 1 = -2 \times (-10) + 3 = 20 + 3 = \boxed{23},$$

$$u_3 = -2u_2 + 3 \times 2 = -2 \times 23 + 6 = -46 + 6 = \boxed{-40},$$

$$u_4 = -2u_3 + 3 \times 3 = -2 \times (-40) + 9 = 80 + 9 = \boxed{89}.$$

2) a. La variable v est initialisée à -2 (ligne 2) : c'est la valeur renvoyée pour $n = 0$, car la boucle n'est alors pas exécutée. Donc $\boxed{v_0 = -2}$.

À chaque passage dans la boucle (ligne 4), la nouvelle valeur de v est -7 fois l'ancienne, plus 1. Donc, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{v_{n+1} = -7v_n + 1}.$$

b. On calcule les termes de proche en proche :

$$v_1 = -7 \times (-2) + 1 = 15,$$

$$v_2 = -7 \times 15 + 1 = -104,$$

$$v_3 = -7 \times (-104) + 1 = 729,$$

$$v_4 = -7 \times 729 + 1 = -5103 + 1 = \boxed{-5102}.$$

Vérification : l'appel $v(4)$ renvoie bien -5102 .

3) Pour tout entier naturel n , $w_{n+1} - w_n = 3$: on passe d'un terme au suivant en ajoutant 3 (la suite (w_n) est arithmétique de raison 3). Pour passer de w_0 à w_{10} , on ajoute 10 fois 3 :

$$w_{10} = w_0 + 10 \times 3 \iff 42 = w_0 + 30 \iff w_0 = 42 - 30.$$

$$\boxed{w_0 = 12}$$

Vérification : $w_0 = 12, w_1 = 15, w_2 = 18, \dots, w_{10} = 12 + 30 = 42$.