

Exercice 1

6 points

- 1) On lit sur l'arbre : $P_A(B) = 0,6$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,7$.

Si les deux épreuves étaient indépendantes, le résultat de la première n'aurait aucune influence sur la seconde : la probabilité de B serait la même sur les deux branches, c'est-à-dire $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$. Ici, $0,6 \neq 0,7$.

Vérification par le calcul de $P(B)$ (formule des probabilités totales) :

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0,2 \times 0,6 + 0,8 \times 0,7 = 0,12 + 0,56 = 0,68,$$

et $P_A(B) = 0,6 \neq 0,68 = P(B)$: les événements A et B ne sont pas indépendants.

Réponse b. : FAUX

- 2) On traduit les données : $P(D) = 0,8$, $P(M) = 0,45$ et $P_M(\bar{D}) = \frac{1}{5} = 0,2$.

On en déduit la probabilité qu'une personne myope soit droitier :

$$P_M(D) = 1 - P_M(\bar{D}) = 1 - 0,2 = 0,8.$$

Ainsi $P_M(D) = P(D) = 0,8$: savoir que la personne est myope ne change pas la probabilité qu'elle soit droitier.

Autre rédaction : $P(M \cap D) = P(M) \times P_M(D) = 0,45 \times 0,8 = 0,36$ et $P(M) \times P(D) = 0,45 \times 0,8 = 0,36$, donc $P(M \cap D) = P(M) \times P(D)$.

Réponse a. : VRAI, D et M sont indépendants.

- 3) Le tableau indique une fonction qui s'annule en $\frac{1}{2}$ et qui est strictement négative partout ailleurs.

- a. On reconnaît une identité remarquable : $-4x^2 + 4x - 1 = -(4x^2 - 4x + 1) = -(2x - 1)^2$.
Un carré est positif ou nul, donc $f(x) \leq 0$, avec $f(x) = 0 \iff 2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$.
Convient.

- b. $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 \geq 0$: cette fonction est positive. **Ne convient pas.**

- c. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ et $-4 < 0$, donc $f(x) \leq 0$, avec égalité seulement pour $x = \frac{1}{2}$. **Convient.**

(En développant : $-4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = -4x^2 + 4x - 1$: c'est la même fonction qu'en a.)

- d. $4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ et cette fonction s'annule en $-\frac{1}{2}$, pas en $\frac{1}{2}$. **Ne convient pas.**

Réponses a. et c.

Exercice 2

4 points

1) On calcule le discriminant du trinôme $3x^2 + 5x + 9$ ($a = 3, b = 5, c = 9$) :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times 9 = 25 - 108 = -83.$$

$\Delta < 0$: le trinôme n'a aucune racine réelle, l'équation n'a pas de solution.

$$S = \emptyset$$

2) On étudie le signe du trinôme $-2x^2 - 6x + 8$ ($a = -2, b = -6, c = 8$) :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-2) \times 8 = 36 + 64 = 100 = 10^2 > 0.$$

Le trinôme a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - 10}{-4} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + 10}{-4} = -4.$$

Vérification : $-2 \times 1^2 - 6 \times 1 + 8 = 0$ et $-2 \times (-4)^2 - 6 \times (-4) + 8 = -32 + 24 + 8 = 0$.

Le coefficient $a = -2$ est négatif : le trinôme est du signe de a (négatif) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
$-2x^2 - 6x + 8$	$-$	0	$+$	0	$-$

On veut un trinôme strictement négatif (racines exclues) :

$$S =]-\infty; -4[\cup]1; +\infty[$$

Exercice 3

5 points

- 1) Le point M parcourt le segment $[DC]$, de longueur $DC = AB = 6$. La distance DM va donc de 0 (quand $M = D$) à 6 (quand $M = C$) :

$$x \in [0; 6]$$

- 2) $ABCD$ est un rectangle, donc ses angles sont droits.

- Le triangle ADM est rectangle en D . D'après le théorème de Pythagore :

$$AM^2 = AD^2 + DM^2 = 2^2 + x^2, \quad \text{soit} \quad AM^2 = x^2 + 4.$$

- Le triangle BCM est rectangle en C , avec $BC = AD = 2$ et $MC = DC - DM = 6 - x$. D'après le théorème de Pythagore :

$$BM^2 = BC^2 + MC^2 = 4 + (6 - x)^2 = 4 + 36 - 12x + x^2, \quad \text{soit} \quad BM^2 = x^2 - 12x + 40.$$

- 3) D'après le théorème de Pythagore et sa réciproque, le triangle AMB est rectangle en M si et seulement si $AM^2 + BM^2 = AB^2$ ($[AB]$ est alors l'hypoténuse). Or $AB^2 = 36$, d'où :

$$\begin{aligned} AMB \text{ rectangle en } M &\iff (x^2 + 4) + (x^2 - 12x + 40) = 36 \\ &\iff 2x^2 - 12x + 44 = 36 \\ &\iff 2x^2 - 12x + 8 = 0 \quad (\text{on retranche } 36) \end{aligned}$$

$$AMB \text{ est rectangle en } M \iff 2x^2 - 12x + 8 = 0$$

- 4) On résout $2x^2 - 12x + 8 = 0$ sur $[0; 6]$. En divisant par 2 : $x^2 - 6x + 4 = 0$.

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 36 - 16 = 20 > 0, \quad \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}.$$

$$x_1 = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{2} = 3 - \sqrt{5} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{2} = 3 + \sqrt{5}.$$

On vérifie que ces valeurs sont dans $[0; 6]$: comme $4 < 5 < 9$, on a $2 < \sqrt{5} < 3$, donc

$$0 < 3 - \sqrt{5} < 1 \quad \text{et} \quad 5 < 3 + \sqrt{5} < 6.$$

Les deux solutions conviennent : il y a **deux positions** du point M .

$$DM = 3 - \sqrt{5} \approx 0,76 \quad \text{ou} \quad DM = 3 + \sqrt{5} \approx 5,24$$

Remarque : $(3 - \sqrt{5}) + (3 + \sqrt{5}) = 6$: les deux positions sont symétriques par rapport au milieu de $[DC]$, ce qui est cohérent avec la symétrie du rectangle.

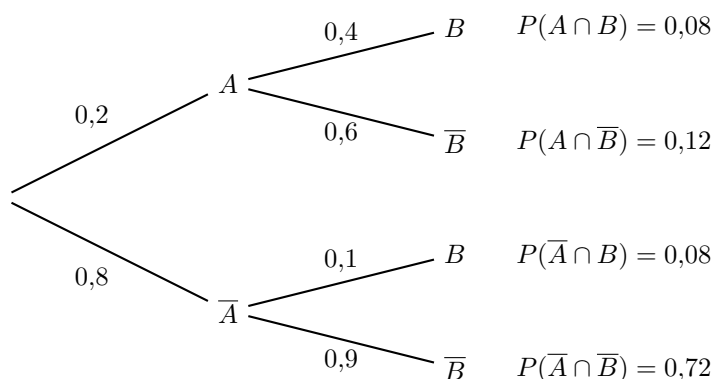
Exercice 4

5 points

1) On traduit chaque donnée par une probabilité :

- « la probabilité qu'il s'abonne à l'édition papier est égale à 0,2 » : $P(A) = 0,2$;
- « s'il s'abonne à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à l'édition électronique est égale à 0,4 » : $P_A(B) = 0,4$;
- « s'il ne s'abonne pas à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition électronique est égale à 0,1 » : $P_{\bar{A}}(B) = 0,1$.

2) On complète avec les probabilités contraires : $P(\bar{A}) = 1 - 0,2 = 0,8$, $P_A(\bar{B}) = 1 - 0,4 = 0,6$, $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - 0,1 = 0,9$.



Vérification : $0,08 + 0,12 + 0,08 + 0,72 = 1$.

3) On cherche $P(A \cap B)$: on multiplie les probabilités le long du chemin A puis B.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,2 \times 0,4 = \boxed{0,08}$$

4) A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) \\ &= 0,08 + 0,8 \times 0,1 = 0,08 + 0,08 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(B) = 0,16}$$

5) On cherche la probabilité de A sachant B :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,08}{0,16} = \boxed{0,5}$$

Sachant que la personne s'est abonnée à l'édition électronique, il y a une chance sur deux qu'elle soit aussi abonnée à l'édition papier.