

Exercice 1

1,5 point

Ensemble de définition. La racine carrée $\sqrt{2x+7}$ existe si et seulement si $2x+7 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -\frac{7}{2}$.

Condition nécessaire. Une racine carrée est toujours positive ou nulle. Si x est solution, alors $x+2 = \sqrt{2x+7} \geq 0$, donc $x \geq -2$ (ce qui entraîne $x \geq -\frac{7}{2}$).

Résolution pour $x \geq -2$. Les deux membres sont alors positifs ou nuls; deux nombres positifs sont égaux si et seulement si leurs carrés sont égaux :

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+7} = x+2 &\iff 2x+7 = (x+2)^2 && \text{(les deux membres sont positifs)} \\ &\iff 2x+7 = x^2+4x+4 \\ &\iff x^2+2x-3 = 0. && \text{(on regroupe dans le membre de droite)}\end{aligned}$$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$, d'où deux racines :

$$x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1.$$

Or $-3 < -2$: la valeur -3 ne vérifie pas la condition $x \geq -2$ et doit être rejetée. Seule 1 convient.

$$\boxed{S = \{1\}}$$

Vérification : $\sqrt{2 \times 1 + 7} = \sqrt{9} = 3$ et $1 + 2 = 3$. En revanche, pour $x = -3$: $\sqrt{1} = 1 \neq -1$ (solution « parasite » introduite par l'élévation au carré).

Exercice 2

3 points

1) Racines du numérateur $3x^2 + 7x - 6$: $\Delta = 7^2 - 4 \times 3 \times (-6) = 49 + 72 = 121 = 11^2$, d'où

$$x_1 = \frac{-7-11}{6} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-7+11}{6} = \frac{2}{3}.$$

Racines du dénominateur $4x^2 + 3x - 10$: $\Delta = 3^2 - 4 \times 4 \times (-10) = 9 + 160 = 169 = 13^2$, d'où

$$x_3 = \frac{-3-13}{8} = -2 \quad \text{et} \quad x_4 = \frac{-3+13}{8} = \frac{5}{4}.$$

Le quotient est défini si et seulement si le dénominateur ne s'annule pas : l'inéquation est définie

$$\text{sur } \boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-2; \frac{5}{4}\right\}}.$$

Les deux trinômes ont un coefficient a positif (3 et 4) : chacun est positif à l'extérieur de ses racines et négatif entre elles. On range les racines : $-3 < -2 < \frac{2}{3} < \frac{5}{4}$.

x	$-\infty$	-3	-2	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$			
$3x^2 + 7x - 6$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$			
$4x^2 + 3x - 10$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		
$\frac{3x^2 + 7x - 6}{4x^2 + 3x - 10}$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$

Le quotient est positif ou nul là où il vaut 0 (en -3 et $\frac{2}{3}$) et là où il est positif, en excluant les valeurs interdites -2 et $\frac{5}{4}$:

$$\mathcal{S} =]-\infty; -3] \cup \left]-2; \frac{2}{3}\right] \cup \left]\frac{5}{4}; +\infty\right[$$

Vérification : pour $x = 0$, le quotient vaut $\frac{-6}{-10} = 0,6 \geq 0$, et $0 \in \left]-2; \frac{2}{3}\right]$.

2) **Ensemble de définition.** Il faut $3x + 1 \neq 0$ et $x - 5 \neq 0$: l'inéquation est définie sur

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}; 5\right\}.$$

On se ramène à « quotient < 0 ». Pour $x \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{3x+1} < \frac{1}{x-5} &\iff \frac{3x+1+2}{3x+1} - \frac{1}{x-5} < 0 \\ &\iff \frac{(3x+3)(x-5) - (3x+1)}{(3x+1)(x-5)} < 0 \quad (\text{même dénominateur}) \\ &\iff \frac{3x^2 - 15x + 3x - 15 - 3x - 1}{(3x+1)(x-5)} < 0 \\ &\iff \frac{3x^2 - 15x - 16}{(3x+1)(x-5)} < 0. \end{aligned}$$

Racines du numérateur : $\Delta = (-15)^2 - 4 \times 3 \times (-16) = 225 + 192 = 417 > 0$, d'où

$$\alpha = \frac{15 - \sqrt{417}}{6} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{15 + \sqrt{417}}{6}.$$

Rangement des valeurs. Comme $17^2 = 289 < 417$, on a $\sqrt{417} > 17$, donc :

- $15 - \sqrt{417} < 15 - 17 = -2$, d'où $\alpha < -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$;
- $15 + \sqrt{417} > 15 + 17 = 32 > 30$, d'où $\beta > \frac{30}{6} = 5$.

Ainsi $\alpha < -\frac{1}{3} < 5 < \beta$ (valeurs approchées : $\alpha \approx -0,90$ et $\beta \approx 5,90$).

Le numérateur ($a = 3 > 0$) est négatif entre α et β ; $3x + 1$ change de signe en $-\frac{1}{3}$ et $x - 5$ en 5.

x	$-\infty$	α	$-\frac{1}{3}$	5	β	$+\infty$	
$3x^2 - 15x - 16$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$3x + 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 5$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{3x^2 - 15x - 16}{(3x + 1)(x - 5)}$	$+$	0	$-$	$+$	$-$	0	$+$

L'inégalité est stricte : on garde les intervalles où le quotient est strictement négatif.

$$\mathcal{S} = \left] \frac{15 - \sqrt{417}}{6} ; -\frac{1}{3} \right[\cup \left] 5 ; \frac{15 + \sqrt{417}}{6} \right[$$

Vérification : pour $x = 0$ (hors de $\mathcal{S}$) : $1 + 2 = 3$ et $\frac{1}{-5} = -0,2$, et $3 < -0,2$ est faux. Pour $x = 5,5 \in \mathcal{S}$: $1 + \frac{2}{17,5} \approx 1,11$ et $\frac{1}{0,5} = 2$, et $1,11 < 2$ est vrai.

Exercice 3

1,5 point

On note L et ℓ les dimensions du rectangle, en cm.

- Périmètre : $2(L + \ell) = 36$, donc $L + \ell = 18$, soit $\ell = 18 - L$.
- Aire : $L \times \ell = 32$.

En remplaçant ℓ par $18 - L$ dans l'aire :

$$L(18 - L) = 32 \iff 18L - L^2 = 32 \iff L^2 - 18L + 32 = 0.$$

$$\Delta = (-18)^2 - 4 \times 1 \times 32 = 324 - 128 = 196 = 14^2, \text{ d'où}$$

$$L_1 = \frac{18 - 14}{2} = 2 \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{18 + 14}{2} = 16.$$

Si $L = 16$, alors $\ell = 18 - 16 = 2$; si $L = 2$, alors $\ell = 16$: c'est le même rectangle.

Le rectangle mesure 16 cm sur 2 cm.

Vérification : périmètre $2 \times (16 + 2) = 36$ cm et aire $16 \times 2 = 32$ cm².

Remarque : L et ℓ sont les deux nombres de somme $S = 18$ et de produit $P = 32$: ce sont les racines de $X^2 - SX + P = X^2 - 18X + 32$.

Exercice 4

3 points

- 1) L'équation est définie pour $x \neq 1$ (car $x - 1$ et $2x - 2 = 2(x - 1)$ ne doivent pas s'annuler). Pour $x \neq 1$:

$$\frac{5x}{2x-2} = \frac{5x}{2(x-1)} = \frac{5}{2} \times \frac{x}{x-1} = \frac{5}{2}X.$$

L'équation devient :

$$X^2 - \frac{5}{2}X + 1 = 0 \iff 2X^2 - 5X + 2 = 0 \quad (\text{on multiplie par 2}).$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9, \text{ d'où } X_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \text{ et } X_2 = \frac{5+3}{4} = 2.$$

On revient à l'inconnue x (avec $x \neq 1$) :

$$\frac{x}{x-1} = 2 \iff x = 2(x-1) \quad (\text{on multiplie par } x-1 \neq 0)$$

$$\iff x = 2x - 2 \iff x = 2;$$

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} \iff 2x = x-1 \quad (\text{on multiplie par } 2(x-1) \neq 0)$$

$$\iff x = -1.$$

Les deux valeurs sont différentes de 1 : elles conviennent.

$$\mathcal{S} = \{-1; 2\}$$

Vérification : pour $x = 2$, $X = 2$ et $4 - 5 + 1 = 0$; pour $x = -1$, $X = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4} - \frac{5 \times (-1)}{-4} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + 1 = 0$.

- 2) On fait apparaître $X = x^2 - x - 1$ dans les derniers termes :

$$-3x^2 + 3x - 1 = -3(x^2 - x - 1) - 3 - 1 = -3X - 4.$$

L'équation devient :

$$X^2 - 3X - 4 = 0.$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25, \text{ d'où } X_1 = \frac{3-5}{2} = -1 \text{ et } X_2 = \frac{3+5}{2} = 4.$$

Cas $X = -1$: $x^2 - x - 1 = -1 \iff x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1$.

Cas $X = 4$: $x^2 - x - 1 = 4 \iff x^2 - x - 5 = 0$; $\Delta = 1 + 20 = 21 > 0$, d'où $x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$ ou $x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$.

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1 - \sqrt{21}}{2}; 0; 1; \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right\}$$

Vérification : pour $x = 0$: $(-1)^2 - 0 + 0 - 1 = 0$; pour $x = 1$: $(-1)^2 - 3 + 3 - 1 = 0$.

Exercice 5

3 points

1) $P(x) = x \iff x^2 - 3x - 5 = x \iff x^2 - 4x - 5 = 0.$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 16 + 20 = 36, \text{ d'où } x_1 = \frac{4-6}{2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{4+6}{2} = 5.$$

 Les solutions de $P(x) = x$ sont -1 et 5 .

2) Pour tout réel t , $P(t) = t^2 - 3t - 5$. En remplaçant t par $P(x) = x^2 - 3x - 5$:

$$P(P(x)) = (P(x))^2 - 3P(x) - 5 = (x^2 - 3x - 5)^2 - 3(x^2 - 3x - 5) - 5.$$

Le membre de gauche de (E) est donc exactement $P(P(x))$, d'où $(E) \iff P(P(x)) = x$.

3) **Coefficient de x^4 .** Dans $Q(x) = (x^2 - 3x - 5)^2 - 3(x^2 - 3x - 5) - 5 - x$, le seul terme de degré 4 provient de $(x^2)^2 = x^4$: son coefficient est 1. Dans $(x - 5)(x + 1)(ax^2 - 2x + c)$, le terme de degré 4 est $x \times x \times ax^2 = ax^4$. Par identification, $a = 1$.

Terme constant. On calcule $Q(0)$ des deux façons :

$$Q(0) = P(P(0)) - 0 = P(-5) = 25 + 15 - 5 = 35 \quad \text{et} \quad Q(0) = (-5) \times 1 \times c = -5c.$$

Donc $-5c = 35$, soit $c = -7$.

Vérification par développement : $(x - 5)(x + 1) = x^2 - 4x - 5$ et

$$(x^2 - 4x - 5)(x^2 - 2x - 7) = x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 38x + 35,$$

qui est bien le développement de $Q(x) = (x^2 - 3x - 5)^2 - 3(x^2 - 3x - 5) - 5 - x$.

4) D'après les questions 2 et 3, $(E) \iff Q(x) = 0 \iff (x - 5)(x + 1)(x^2 - 2x - 7) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

• $x - 5 = 0 \iff x = 5$; $x + 1 = 0 \iff x = -1$ (on retrouve les solutions de $P(x) = x$: si $P(x) = x$, alors $P(P(x)) = P(x) = x$);

• $x^2 - 2x - 7 = 0$: $\Delta = 4 + 28 = 32 = (4\sqrt{2})^2$, d'où $x = \frac{2 - 4\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sqrt{2}$ ou $x = 1 + 2\sqrt{2}$.

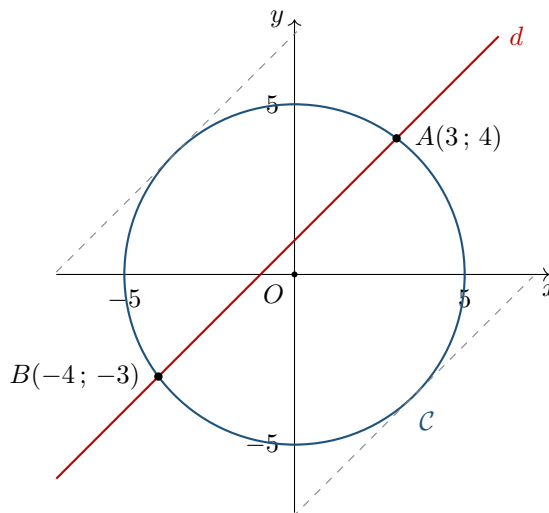
$$\mathcal{S} = \{-1; 1 - 2\sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}; 5\}$$

Vérification : pour $x = 1 + 2\sqrt{2}$, $x^2 = 9 + 4\sqrt{2}$, donc $P(x) = 9 + 4\sqrt{2} - 3 - 6\sqrt{2} - 5 = 1 - 2\sqrt{2}$, puis, de même, $P(1 - 2\sqrt{2}) = 9 - 4\sqrt{2} - 3 + 6\sqrt{2} - 5 = 1 + 2\sqrt{2} = x$. Les deux nouvelles solutions s'échangent par P .

Exercice 6

3 points

- 1) Figure (unité : 0,45 cm) : le cercle $\mathcal{C}$, la droite d et, en pointillés, les deux droites d_p tangentes au cercle (question 4).



- 2) Un point $M(x; y)$ est commun à $\mathcal{C}$ et à d si et seulement si $y = x + 1$ et $x^2 + y^2 = 25$. En remplaçant y par $x + 1$:

$$\begin{aligned} x^2 + (x + 1)^2 = 25 &\iff x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25 \\ &\iff 2x^2 + 2x - 24 = 0 \\ &\iff x^2 + x - 12 = 0. \quad (\text{on divise par 2}) \end{aligned}$$

L'abscisse d'un point commun vérifie donc bien $x^2 + x - 12 = 0$.

- 3) $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 1 + 48 = 49$, d'où $x_1 = \frac{-1 - 7}{2} = -4$ et $x_2 = \frac{-1 + 7}{2} = 3$.
Les ordonnées s'obtiennent avec $y = x + 1$: $y_1 = -3$ et $y_2 = 4$.

$\mathcal{C}$ et d se coupent en $A(3; 4)$ et $B(-4; -3)$.

Vérification : $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ et $(-4)^2 + (-3)^2 = 16 + 9 = 25$.

- 4) Comme à la question 2, un point $M(x; y)$ est commun à $\mathcal{C}$ et d_p si et seulement si $y = x + p$ et

$$x^2 + (x + p)^2 = 25 \iff 2x^2 + 2px + p^2 - 25 = 0.$$

À chaque solution x de cette équation correspond un seul point de d_p (d'ordonnée $x + p$). La droite d_p coupe donc $\mathcal{C}$ en deux points distincts si et seulement si cette équation du second degré a deux solutions, c'est-à-dire si son discriminant est strictement positif :

$$\Delta = (2p)^2 - 4 \times 2 \times (p^2 - 25) = 4p^2 - 8p^2 + 200 = 200 - 4p^2.$$

$$\Delta > 0 \iff 4p^2 < 200 \iff p^2 < 50 \iff -\sqrt{50} < p < \sqrt{50}, \quad \text{avec } \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

d_p coupe $\mathcal{C}$ en deux points distincts si et seulement si $p \in]-\sqrt{50}; \sqrt{50}[$.

Vérification : pour $p = 1$ (question 3), $\Delta = 196 > 0$ et $1 \in]-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2}[$ ($5\sqrt{2} \approx 7,07$). Pour $p = \pm 5\sqrt{2}$, $\Delta = 0$: la droite est tangente au cercle (pointillés sur la figure); pour $|p| > 5\sqrt{2}$, elle ne le coupe pas.

Exercice 7

5 points

- 1) **Réponse b.** $a = 2 > 0$: f admet un minimum, atteint en $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{4} = -1$, et $f(-1) = 2 - 4 - 5 = -7$. f est décroissante sur $]-\infty; -1]$, donc pas croissante sur $[-2; +\infty[$ (réponse a fausse), et $f(-1)$ est un minimum, pas un maximum (réponse c fausse).
- 2) **Réponse b.** $\Delta = (-7)^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 49 + 8 = 57$.
- 3) **Réponse b.** $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 4 \times 0 = 9$.
- 4) **Réponse c.** g a deux racines distinctes, 1 et -2 , donc son discriminant est strictement positif (a fausse); $a = 2 > 0$, la parabole est tournée vers le haut (b fausse); $g(x)$ est du signe contraire de a , donc strictement négatif, entre les racines : la parabole est au-dessous de l'axe des abscisses sur $]-2; 1[$.
- 5) **Réponse a.** $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ (racines -2 et 1 , car $\Delta = 1 + 8 = 9$). Avec $a = 1 > 0$, le trinôme est positif ou nul à l'extérieur des racines : sur $]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$.
- 6) **Réponse b.** $\Delta = 10^2 - 4 \times (-1) \times (-9) = 100 - 36 = 64 > 0$ (a fausse); les racines sont $\frac{-10 - 8}{-2} = 9$ et $\frac{-10 + 8}{-2} = 1$. Avec $a = -1 < 0$, h est croissante sur $]-\infty; 5]$ et décroissante sur $[5; +\infty[$ (c fausse).
- 7) **Réponse c.** $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2,5 \times 2 = 25 - 20 = 5 > 0$: deux solutions $\frac{5 - \sqrt{5}}{2 \times 2,5} = \frac{5 - \sqrt{5}}{5}$ et $\frac{5 + \sqrt{5}}{5}$. La réponse a oublie le signe « $-b$ » : $\frac{-5 + \sqrt{5}}{5}$ n'est pas solution.
- 8) **Réponse b.** $(2x+1)^2 - 7x^2 = -9x+5 \iff 4x^2+4x+1-7x^2+9x-5=0 \iff -3x^2+13x-4=0$; $\Delta = 169 - 48 = 121 > 0$: deux solutions ($\frac{1}{3}$ et 4).
- 9) **Réponse a.** $\Delta = b^2 - 4 \times (-2) \times (-15) = b^2 - 120$. Pour $b = 0$, $\Delta = -120 < 0$: aucune solution. La réponse b est fausse ($b = 1$ donne $\Delta = -119 < 0$), donc la réponse c aussi.
- 10) **Réponse b.** $3x^2 + 9x + 6 = 3(x^2 + 3x + 2) = 3(x + 1)(x + 2)$, de racines -2 et -1 ; avec $a = 3 > 0$, il est positif ou nul à l'extérieur des racines : $\mathcal{S} =]-\infty; -2] \cup [-1; +\infty[$.

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse	b	b	b	c	a	b	c	b	a	b