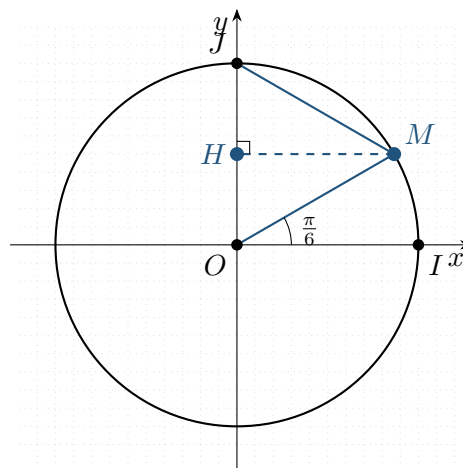


Exercice 1

1) Figure.

M est le point du cercle trigonométrique tel que l'angle $\widehat{IOM}$ mesure $\frac{\pi}{6}$ (soit 30°); H est le pied de la perpendiculaire à (OJ) passant par M . On trace les segments $[OM]$, $[MJ]$ et $[MH]$.



- 2) Les points M et J sont sur le cercle trigonométrique, de rayon 1 : $OM = OJ = 1$. Le triangle OMJ est donc isocèle en O .

De plus, $\widehat{JOM} = \widehat{IOJ} - \widehat{IOM} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, soit 60° .

Un triangle isocèle dont l'angle au sommet mesure 60° a ses deux angles à la base égaux à $\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$: ses trois angles sont égaux.

Le triangle OMJ est équilatéral (de côté 1).

- 3) H est le projeté orthogonal de M sur (OJ) : (MH) est la hauteur issue de M dans le triangle OMJ .

Dans un triangle équilatéral, la hauteur issue d'un sommet est aussi la médiane issue de ce sommet. Donc H est le milieu de $[OJ]$ et

$$OH = \frac{OJ}{2} = \frac{1}{2}$$

- 4) Le triangle OMH est rectangle en H . D'après le théorème de Pythagore :

$$OM^2 = OH^2 + MH^2 \iff MH^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Comme $MH > 0$:

$$MH = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- 5) Les coordonnées de M sont $\left(\cos \frac{\pi}{6}; \sin \frac{\pi}{6}\right)$.

- L'ordonnée de M est celle de H , situé sur la demi-droite $[OJ]$: elle vaut $OH = \frac{1}{2}$.
- L'abscisse de M , positive, est la distance de M à l'axe (OJ) : elle vaut $MH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Exercice 2

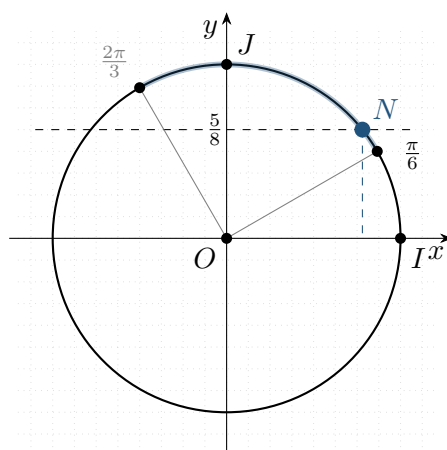
Partie A

- 1) Le point N a pour ordonnée $\sin \beta = \frac{5}{8} = 0,625$: il se trouve sur la droite horizontale d'équation $y = \frac{5}{8}$.

Cette droite coupe le cercle en deux points, symétriques par rapport à l'axe (OJ) .

- $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} < \frac{5}{8}$: le point d'abscisse positive est donc « au-dessus » du point associé à $\frac{\pi}{6}$.
- Sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$, le sinus décroît de 1 à $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87 > \frac{5}{8}$: le point d'abscisse négative, situé « après » le point associé à $\frac{2\pi}{3}$, ne convient pas.

N est donc le point du cercle d'ordonnée $\frac{5}{8}$ et d'abscisse **positive**, situé sur l'arc entre les points associés à $\frac{\pi}{6}$ et à $\frac{\pi}{2}$.



- 2) Pour tout réel β , $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$, donc

$$\cos^2 \beta = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 1 - \frac{25}{64} = \frac{39}{64}.$$

D'après la question 1, $\beta \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ (le point N a une abscisse positive), donc $\cos \beta > 0$ et

$$\cos \beta = \sqrt{\frac{39}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8} \quad (\approx 0,78)$$

Partie B

On utilise les valeurs remarquables et les formules des angles associés : pour tout réel x ,

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad (k \in \mathbb{Z}); \quad \sin(-x) = -\sin x;$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x; \quad \sin(\pi - x) = \sin x; \quad \cos(\pi + x) = -\cos x; \quad \sin(\pi + x) = -\sin x.$$

a. $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$, $\frac{6\pi}{3} = 2\pi$ et $\frac{8\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$, donc :

- $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$
- $\sin \frac{4\pi}{3} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$
- $\sin \frac{6\pi}{3} = \sin(2\pi) = 0;$
- $\sin \frac{8\pi}{3} = \sin \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi \right) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \boxed{A = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

b.

- $\cos(\pi - x) = -\cos x;$
- $\sin(-x - \pi) = \sin(-(x + \pi)) = -\sin(x + \pi) = -(-\sin x) = \sin x;$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x.$

$$B(x) = -\cos x + 4 \sin x - 5 \times (-\sin x) = -\cos x + 4 \sin x + 5 \sin x$$

$$\boxed{B(x) = 9 \sin x - \cos x}$$

c.

- $\cos(\pi + x) = -\cos x;$
- $\cos(-2\pi + x) = \cos x$ (on retranche un tour complet);
- $\cos(3\pi + x) = \cos(\pi + x + 2\pi) = \cos(\pi + x) = -\cos x.$

$$C(x) = -\cos x + 2 \cos x + 3 \times (-\cos x) = -\cos x + 2 \cos x - 3 \cos x$$

$$\boxed{C(x) = -2 \cos x}$$

Exercice 3

1) Les points $A(1; 0,5)$ et $B(3; 1)$ sont sur $\mathcal{C}$:

$$f(1) = 0,5$$

$$f(3) = 1$$

2) $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a .

- La tangente en A passe par $A(1; 0,5)$ et par le point $(3; 1)$ (elle passe aussi par $(-1; 0)$). Son coefficient directeur est

$$\frac{1 - 0,5}{3 - 1} = \frac{0,5}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{donc} \quad f'(1) = \frac{1}{4} = 0,25$$

- La tangente en B est horizontale (parallèle à l'axe des abscisses) : son coefficient directeur est nul, donc

$$f'(3) = 0$$

3) a. La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

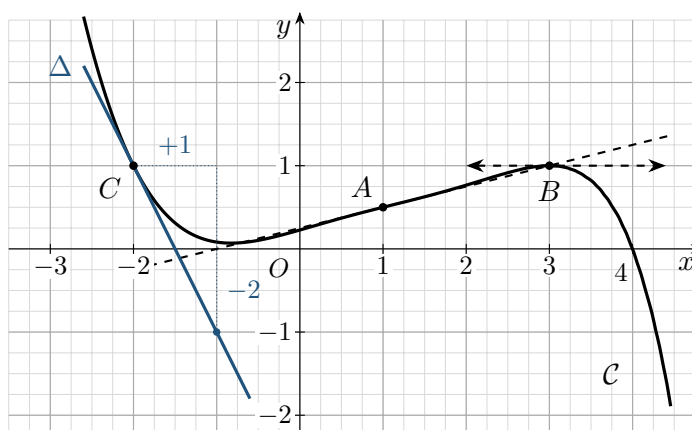
Avec $a = -2$, $f(-2) = 1$ (car $C(-2; 1) \in \mathcal{C}$) et $f'(-2) = -2$:

$$y = -2(x - (-2)) + 1 = -2(x + 2) + 1 = -2x - 4 + 1$$

$$\Delta : y = -2x - 3$$

Vérification : pour $x = -2$, $-2 \times (-2) - 3 = 1 = f(-2)$.

- b. On part de $C(-2; 1)$: en avançant de 1 unité vers la droite, on descend de 2 unités (coefficient directeur -2), ce qui donne le point $(-1; -1)$. La droite Δ passe aussi par $(-1,5; 0)$ et $(-2,5; 2)$.



Exercice 4

Soit h un réel non nul.

Calcul de $g(2)$: $g(2) = -2 \times 2^2 + 5 \times 2 - 1 = -8 + 10 - 1 = 1.$

Calcul de $g(2+h)$:

$$g(2+h) = -2(2+h)^2 + 5(2+h) - 1 = -2(4+4h+h^2) + 10 + 5h - 1 = -8 - 8h - 2h^2 + 9 + 5h = -2h^2 - 3h + 1.$$

Taux d'accroissement de g entre 2 et $2+h$:

$$\frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \frac{-2h^2 - 3h + 1 - 1}{h} = \frac{h(-2h - 3)}{h} = -2h - 3.$$

Limite : lorsque h tend vers 0, $-2h - 3$ tend vers -3 , qui est un nombre réel :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = -3.$$

$g \text{ est dérivable en } 2 \text{ et } g'(2) = -3$

Vérification (avec les formules de dérivation, vues plus loin dans le chapitre) : la fonction dérivée de g est $g'(x) = -4x + 5$, et $g'(2) = -8 + 5 = -3$.