

Exercice 1

5 points

- 1) Pour $x = 0 : 100 \times 0^2 - 1 = -1 < 0$. Ce contre-exemple suffit.

L'affirmation est fausse.

Remarque : $100x^2 - 1 = (10x - 1)(10x + 1)$ est strictement négatif pour $x \in \left] -\frac{1}{10}; \frac{1}{10} \right[$.

- 2) Contre-exemple : $f(x) = -x^2$ est un polynôme du second degré qui admet une racine double, 0 (son discriminant est nul). Pourtant $f(1) = -1 < 0$.

De même, $g(x) = x^2 + 1$ vérifie $g(x) \geq 0$ pour tout réel x , mais n'a aucune racine ($\Delta = -4 < 0$) : aucune des deux implications n'est vraie.

L'affirmation est fausse.

- 3) Si $(x; y)$ est solution, x et y sont deux nombres de somme $S = 8$ et de produit $P = 11$: ce sont les racines de l'équation $t^2 - 8t + 11 = 0$.

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 11 = 64 - 44 = 20 > 0,$$

$$t_1 = \frac{8 - \sqrt{20}}{2} = 4 - \sqrt{5}, \quad t_2 = \frac{8 + \sqrt{20}}{2} = 4 + \sqrt{5}.$$

Vérification : $(4 - \sqrt{5}) + (4 + \sqrt{5}) = 8$ et $(4 - \sqrt{5})(4 + \sqrt{5}) = 16 - 5 = 11$.

Le système a donc **deux** couples solutions : $S = \{(4 - \sqrt{5}; 4 + \sqrt{5}); (4 + \sqrt{5}; 4 - \sqrt{5})\}$. Le couple $(4 + \sqrt{5}; 4 - \sqrt{5})$ manque dans l'ensemble proposé.

L'affirmation est fausse.

- 4) a. On applique $u_{n+1} = n + 2u_n$ de proche en proche :

$$u_1 = 0 + 2u_0 = 2 \times (-3) = -6, \quad u_2 = 1 + 2u_1 = 1 - 12 = -11,$$

$$u_3 = 2 + 2u_2 = 2 - 22 = -20, \quad u_4 = 3 + 2u_3 = 3 - 40 = -37.$$

$$u_4 = -37 : \text{l'affirmation est vraie.}$$

Attention : u_4 est le cinquième terme de la suite, puisque le premier terme est u_0 .

- b. Pour tout entier naturel n , on applique la relation au rang $n + 1$, puis au rang n :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= (n + 1) + 2u_{n+1} \\ &= n + 1 + 2(n + 2u_n) \\ &= n + 1 + 2n + 4u_n \\ &= 3n + 1 + 4u_n. \end{aligned}$$

L'affirmation est vraie.

Vérification : pour $n = 0, 3 \times 0 + 1 + 4u_0 = 1 - 12 = -11 = u_2$; pour $n = 2, 7 + 4u_2 = 7 - 44 = -37 = u_4$.

Exercice 2

4 points

1) On développe l'expression donnée à l'étape 3 :

$$3(x-4)(x+5) = 3(x^2 + 5x - 4x - 20) = 3(x^2 + x - 20) = 3x^2 + 3x - 60 = f(x).$$

Le résultat du logiciel est donc correct : $f(x) = 3(x-4)(x+5)$.

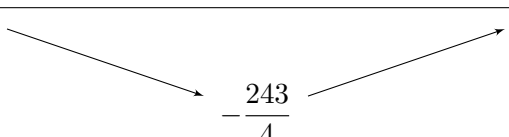
2) a. Les abscisses cherchées sont les solutions de $f(x) = 0$. On utilise la forme factorisée :

$$3(x-4)(x+5) = 0 \iff x-4 = 0 \text{ ou } x+5 = 0 \iff x = 4 \text{ ou } x = -5.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -5 et 4 .

b. On utilise la forme canonique $f(x) = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{243}{4}$, de la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a = 3$, $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{243}{4}$.

Comme $a = 3 > 0$, f est décroissante puis croissante, et son minimum $\beta = -\frac{243}{4} = -60,75$ est atteint en $x = -\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$			

3) a. La courbe coupe l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0. Avec la forme développée : $f(0) = 3 \times 0^2 + 3 \times 0 - 60 = -60$. **L'affirmation est vraie** : le point d'intersection est $(0; -60)$.

b. D'après le tableau de variations, le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est $-\frac{243}{4} = -60,75$. Directement : $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, donc $f(x) = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 60,75 \geq -60,75$. **L'affirmation est vraie.**

c. f est du signe de $a = 3 > 0$ à l'extérieur de ses racines -5 et 4 , et du signe contraire entre elles :

x	$-\infty$	-5	4	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Les solutions de $f(x) \leq 0$ sont donc les réels de $[-5; 4]$, et non ceux de $]-\infty; -5] \cup [4; +\infty[$ (qui sont les solutions de $f(x) \geq 0$).

Contre-exemple : $0 \notin]-\infty; -5] \cup [4; +\infty[$ alors que $f(0) = -60 \leq 0$.

L'affirmation est fausse.

Exercice 3

5 points

- 1) a. Longueur MN . Les droites (MN) et (BC) sont toutes deux perpendiculaires à (AC) , donc elles sont parallèles. Dans le triangle ACB , $M \in [AC]$ et $N \in [AB]$: d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AM}{AC} = \frac{MN}{CB} \iff \frac{x}{10} = \frac{MN}{8} \iff MN = \frac{8x}{10} = \frac{4}{5}x.$$

Aire du triangle AMN , rectangle en M :

$$\mathcal{A}_{AMN} = \frac{AM \times MN}{2} = \frac{1}{2} \times x \times \frac{4}{5}x = \frac{2}{5}x^2.$$

Aire du rectangle $MCDP$: $MC = AC - AM = 10 - x$ et $CD = 3$, donc $\mathcal{A}_{MCDP} = 3(10 - x) = 30 - 3x$.

En additionnant :

$$\mathcal{A}(x) = \frac{2}{5}x^2 - 3x + 30$$

Vérification : pour $x = 10$ ($M = C$), la partie grisée est le triangle ACB d'aire $\frac{10 \times 8}{2} = 40$, et $\mathcal{A}(10) = 40 - 30 + 30 = 40$.

- b. M décrit le segment $[AC]$, de longueur 10 : $x = AM$ varie de 0 ($M = A$) à 10 ($M = C$).

$$\mathcal{D}_A = [0; 10]$$

- 2) a. $\mathcal{A}$ est un polynôme du second degré avec $a = \frac{2}{5} > 0$, $b = -3$ et $c = 30$. Son minimum est atteint en

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{\frac{4}{5}} = \frac{15}{4} = 3,75,$$

$$\mathcal{A}\left(\frac{15}{4}\right) = \frac{2}{5} \times \frac{225}{16} - \frac{45}{4} + 30 = \frac{45}{8} - \frac{90}{8} + \frac{240}{8} = \frac{195}{8} = 24,375.$$

De plus $\mathcal{A}(0) = 30$ et $\mathcal{A}(10) = 40$.

x	0	$\frac{15}{4}$	10
$\mathcal{A}(x)$	30	$\frac{195}{8}$	40

- b. L'aire est minimale pour $x = \frac{15}{4}$: le point M est sur $[AC]$ à $AM = 3,75 \text{ cm}$ de A . L'aire minimale vaut alors $24,375 \text{ cm}^2$.

- 3) On résout $\mathcal{A}(x) = 25$ sur $[0; 10]$:

$$\frac{2}{5}x^2 - 3x + 30 = 25 \iff \frac{2}{5}x^2 - 3x + 5 = 0 \iff 2x^2 - 15x + 25 = 0 \quad (\text{on multiplie par } 5).$$

$$\Delta = (-15)^2 - 4 \times 2 \times 25 = 225 - 200 = 25 > 0, \quad x_1 = \frac{15 - 5}{4} = \frac{5}{2}, \quad x_2 = \frac{15 + 5}{4} = 5.$$

Les deux solutions appartiennent à $[0; 10]$.

Vérification : $\mathcal{A}(5) = 10 - 15 + 30 = 25$ et $\mathcal{A}(2,5) = 2,5 - 7,5 + 30 = 25$.

L'aire grisée vaut 25 cm^2 lorsque $AM = 2,5 \text{ cm}$ ou $AM = 5 \text{ cm}$ (dans ce dernier cas, M est le milieu de $[AC]$).

Exercice 4

6 points

1) Plusieurs réponses sont possibles; voici les plus naturelles.

a. On passe d'un terme au suivant en retranchant 3 : $4 = 7 - 3$, $1 = 4 - 3$, $-2 = 1 - 3$, $-5 = -2 - 3$.

Trois termes suivants : $-8; -11; -14$.

Terme initial $u_0 = 7$; relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n - 3$; formule explicite : $u_n = 7 - 3n$.

b. Les écarts successifs sont 3, 5, 7, 9 (nombres impairs); on remarque aussi que chaque terme vaut un carré moins 1 : $0 = 1^2 - 1$, $3 = 2^2 - 1$, $8 = 3^2 - 1$, $15 = 4^2 - 1$, $24 = 5^2 - 1$.

Trois termes suivants : $35; 48; 63$ ($6^2 - 1$, $7^2 - 1$, $8^2 - 1$).

Terme initial $u_0 = 0$; formule explicite : $u_n = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$; relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

Vérification : $(n+2)^2 - 1 - [(n+1)^2 - 1] = 2n + 3$, et $u_1 = u_0 + 3 = 3$, $u_2 = u_1 + 5 = 8$.

2) a. $u_n = 2n^2 - 5$ permet de calculer u_n directement à partir de n :

(u_n) est définie de façon explicite.

(v_n) est donnée par son premier terme et une relation qui calcule chaque terme à partir du précédent : (v_n) est définie par récurrence.

b.

$$u_0 = 2 \times 0^2 - 5 = -5, \quad u_1 = 2 \times 1^2 - 5 = -3,$$

$$u_2 = 2 \times 2^2 - 5 = 3, \quad u_3 = 2 \times 3^2 - 5 = 13.$$

c. Le premier terme étant u_0 , le 20^e terme est u_{19} :

$$u_{19} = 2 \times 19^2 - 5 = 2 \times 361 - 5 = 717.$$

d. Pour tout entier naturel n :

$$u_n > 157 \iff 2n^2 - 5 > 157 \iff 2n^2 > 162 \iff n^2 > 81 \iff n > 9 \quad (\text{car } n \geq 0).$$

Vérification : $u_9 = 2 \times 81 - 5 = 157$ (pas strictement supérieur) et $u_{10} = 195 > 157$.

$u_n > 157$ à partir du rang $n = 10$.

e.

$$u_{n+1} = 2(n+1)^2 - 5 = 2(n^2 + 2n + 1) - 5 = \boxed{2n^2 + 4n - 3},$$

$$u_n + 1 = 2n^2 - 5 + 1 = \boxed{2n^2 - 4},$$

$$u_{2n-1} = 2(2n-1)^2 - 5 = 2(4n^2 - 4n + 1) - 5 = \boxed{8n^2 - 8n - 3}.$$

Attention : u_{n+1} (terme de rang $n+1$) et $u_n + 1$ (terme de rang n augmenté de 1) sont différents.

Vérification pour $n = 2$: $2 \times 4 + 8 - 3 = 13 = u_3$; $2 \times 4 - 4 = 4 = u_2 + 1$; $32 - 16 - 3 = 13 = u_3 = u_{2 \times 2 - 1}$.

f. (Bonus) Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = 2n^2 + 4n - 3 - (2n^2 - 5) = 4n + 2.$$

Comme $n \geq 0$, $4n + 2 \geq 2 > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$:

La suite (u_n) est strictement croissante.

g. On calcule $v_1 = 0,8 \times 3 + 1,7 = 4,1$, puis de proche en proche (mode suite de la calculatrice, ou touche Ans : $0,8 \times \text{Ans} + 1,7$) :

n	0	1	2	3	4	5	6
v_n	3	4,1	4,98	5,684	6,247	6,698	7,058

($v_4 = 6,2472$, $v_5 = 6,69776$ et $v_6 = 7,058208$ sont arrondis à 10^{-3} .)

h. On poursuit le calcul à la calculatrice :

$$v_7 \approx 7,347, \quad v_8 \approx 7,577, \quad v_9 \approx 7,762, \quad v_{10} \approx 7,909, \quad v_{11} \approx 8,028.$$

Les termes augmentent et $v_{10} \leq 8 < v_{11}$: le plus petit entier cherché est $\boxed{n = 11}$.

Programme Python de vérification (il renvoie 11) :

```

1 def seuil():
2     n = 0
3     v = 3
4     while v <= 8:
5         v = 0.8 * v + 1.7
6         n = n + 1
7     return n

```

i. La relation $v_{n+1} = 0,8 v_n + 1,7$ est vraie pour tout entier naturel n ; en l'écrivant au rang $n-1$ (avec $n \geq 1$) :

$$\boxed{v_n = 0,8 v_{n-1} + 1,7 \quad \text{pour tout entier } n \geq 1.}$$