

Calculatrice autorisée

Exercice 1

5 points

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. **Justifier.**

- 1) Pour tout réel x , $100x^2 - 1 \geq 0$.
- 2) Pour un polynôme f du second degré : « f admet une racine double » équivaut à « pour tout réel x , $f(x) \geq 0$ ».
- 3) Le système $\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 11 \end{cases}$ a pour ensemble de solutions $S = \{(4 - \sqrt{5}; 4 + \sqrt{5})\}$.
- 4) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = n + 2u_n$.
 - a. $u_4 = -37$.
 - b. Pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = 3n + 1 + 4u_n$.

Exercice 2

4 points

 f est une fonction polynôme du second degré dont trois expressions sont données par un logiciel de calcul formel (ci-contre).

1	$f(x) := 3x^2 + 3x - 60$
2	$\text{forme_canonique}(f(x))$ $3*(x+1/2)^2 - 243/4$
3	$\text{factoriser}(f(x))$ $3*(x-4)*(x+5)$

Dans le logiciel, « $*$ » désigne la multiplication, « $/$ » la division et « $^$ » la puissance.

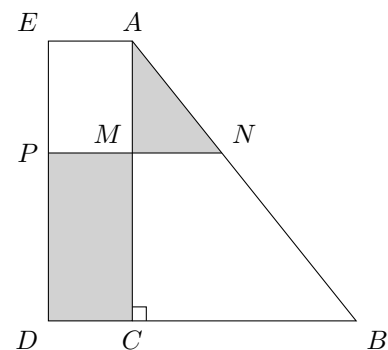
- 1) Justifier le résultat de l'étape 3 donné par le logiciel.
- 2) En utilisant l'expression la plus adaptée de $f(x)$:
 - a. déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses;
 - b. dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 3) Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. **Justifier.**
 - a. La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -60 .
 - b. Pour tout nombre réel x , $f(x) \geq -60,75$.
 - c. Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$ sont les réels de $] -\infty; -5] \cup [4; +\infty[$.

Exercice 3

5 points

On considère un triangle ABC rectangle en C et un rectangle $ACDE$ comme sur la figure ci-contre. On donne $BC = 8$ cm, $CD = 3$ cm et $AC = 10$ cm.

Soit M un point du segment $[AC]$. La perpendiculaire à la droite (AC) passant par M coupe les droites (AB) et (DE) respectivement en N et P . On note x la longueur AM , en cm.

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire, en cm^2 , de la partie grisée, formée du rectangle $MCDP$ et du triangle AMN .


- 1) a. Montrer que $\mathcal{A}(x) = \frac{2}{5}x^2 - 3x + 30$.

Aide : pour déterminer la longueur MN , penser au théorème de Thalès.

- b. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $\mathcal{A}$?
- 2) a. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$.
b. Déterminer la position du point M pour laquelle l'aire $\mathcal{A}(x)$ est minimale.
- 3) Déterminer par le calcul les positions du point M pour lesquelles l'aire de la partie grisée est égale à 25 cm^2 .

Exercice 4

6 points

- 1) Voici les premiers termes de deux suites numériques (u_n) , de premier terme u_0 :

- a. $7; 4; 1; -2; -5; \dots$
- b. $0; 3; 8; 15; 24; \dots$

Pour chacune de ces suites, proposer les trois termes suivants, puis une relation de récurrence exprimant u_{n+1} en fonction de u_n (et éventuellement de n) ou une formule explicite de u_n en fonction de n .

- 2) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 2n^2 - 5 \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 0,8v_n + 1,7 \end{cases}$$

- a. Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles définies de façon explicite ou par récurrence ?
- b. Déterminer les quatre premiers termes u_0, u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) .
- c. Calculer le 20^e terme de la suite (u_n) (le premier terme étant u_0).
- d. Déterminer par le calcul le plus petit entier n tel que $u_n > 157$.
- e. Exprimer en fonction de n : u_{n+1} ; $u_n + 1$; u_{2n-1} (pour $n \geq 1$).
- f. (Question bonus) Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
- g. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous (valeurs arrondies à 10^{-3}).

n	0	1	2	3	4	5	6
v_n							

- h. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $v_n > 8$.
- i. Exprimer v_n en fonction de v_{n-1} , pour tout entier $n \geq 1$.