

Exercice 1

4 points

On repère pour chaque parabole le sens de son ouverture (signe du coefficient de x^2), son sommet et ses intersections avec l'axe des abscisses.

- **Équations (C) et (D).** Les paraboles d'équations $y = x^2 + 1$ et $y = -x^2 + 1$ ont toutes deux pour sommet le point $S(0; 1)$.
 - Pour (C), le coefficient de x^2 est $1 > 0$: la parabole est tournée vers le haut. C'est $\mathcal{P}_2$, de sommet $(0; 1)$, tournée vers le haut.
 - Pour (D), le coefficient de x^2 est $-1 < 0$: la parabole est tournée vers le bas. C'est $\mathcal{P}_3$.
- **Équations (A) et (B).** Elles ont un coefficient de x^2 positif (1 et 2) : les paraboles sont tournées vers le haut. De plus

$$(x - 3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4),$$

donc les deux paraboles coupent l'axe des abscisses aux mêmes points, d'abscisses 2 et 4. Leur sommet a pour abscisse $\frac{2+4}{2} = 3$. Pour les départager, on calcule l'ordonnée du sommet :

- pour (A) : $(3 - 3)^2 - 1 = -1$, sommet $(3; -1)$;
- pour (B) : $2(3 - 2)(3 - 4) = -2$, sommet $(3; -2)$.

La parabole $\mathcal{P}_4$ descend jusqu'à -1 et $\mathcal{P}_1$ jusqu'à -2 .

$$\mathcal{P}_1 : (B)$$

$$\mathcal{P}_2 : (C)$$

$$\mathcal{P}_3 : (D)$$

$$\mathcal{P}_4 : (A)$$

Exercice 2

4 points

- 1) -1 est racine du trinôme si et seulement si $f(-1) = 0$. Or

$$f(-1) = 10 \times (-1)^2 + 22 \times (-1) + 12 = 10 - 22 + 12 = 0.$$

Donc -1 est racine de f .

- 2) Le trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 10$, $b = 22$, $c = 12$ admet une racine, donc deux racines x_1 et x_2 (éventuellement égales), dont le produit vaut

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}.$$

Avec $x_1 = -1$: $-1 \times x_2 = \frac{6}{5}$, d'où $x_2 = -\frac{6}{5}$.

Vérification : $x_1 + x_2 = -1 - \frac{6}{5} = -\frac{11}{5} = -\frac{22}{10} = -\frac{b}{a}$. (On pouvait aussi calculer $\Delta = 22^2 - 4 \times 10 \times 12 = 4$.)

- 3) Un trinôme de racines x_1 et x_2 s'écrit $a(x - x_1)(x - x_2)$, donc

$$f(x) = 10(x + 1) \left(x + \frac{6}{5} \right) = 2(x + 1)(5x + 6).$$

- 4) Le trinôme est du signe de $a = 10 > 0$ à l'extérieur de ses racines et du signe contraire entre ses racines, avec $-\frac{6}{5} < -1$:

x	$-\infty$	$-\frac{6}{5}$	-1	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Exercice 3

4 points

- 1) a. On met x en facteur : $f(x) = 5x^2 + 2x = x(5x + 2)$.

- b. On reconnaît $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a = x - 1$ et $b = 2x - 3$:

$$\begin{aligned} g(x) &= [(x - 1) - (2x - 3)][(x - 1) + (2x - 3)] \\ &= (x - 1 - 2x + 3)(x - 1 + 2x - 3) \\ &= (-x + 2)(3x - 4). \end{aligned}$$

Donc $g(x) = (-x + 2)(3x - 4)$.

- 2) a. D'après 1)a., $5x^2 + 2x = x(5x + 2)$. Les facteurs s'annulent en $x = 0$ et en $x = -\frac{2}{5}$, avec $-\frac{2}{5} < 0$. Tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$	0	$+\infty$	
x	$-$	$-$	0	$+$	
$5x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	
$x(5x + 2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Le produit est strictement positif à l'extérieur des racines :

$$S =]-\infty; -\frac{2}{5}[\cup]0; +\infty[.$$

- b. On se ramène à une équation produit nul grâce à 1)b. :

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 &= (2x - 3)^2 \iff (x - 1)^2 - (2x - 3)^2 = 0 \\ &\iff (-x + 2)(3x - 4) = 0 \\ &\iff -x + 2 = 0 \text{ ou } 3x - 4 = 0 \\ &\iff x = 2 \text{ ou } x = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \frac{4}{3}; 2 \right\}$$

Vérification : pour $x = 2$, $1^2 = 1^2$; pour $x = \frac{4}{3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2$.

Exercice 4

4 points

Partie A

1) Au départ, $t = 0$ et $f(0) = -0^2 + 4 \times 0 - 4 = -4$. La carpe est à l'altitude -4 : elle se trouve à 4 dm de profondeur.

2) La carpe est à la surface lorsque $f(t) = 0$. Or $f(t) = -(t^2 - 4t + 4) = -(t - 2)^2$, donc

$$f(t) = 0 \iff (t - 2)^2 = 0 \iff t = 2.$$

(Le discriminant est nul : $\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 0$.) La carpe atteint la surface à l'instant $t = 2$ s ; c'est le sommet $S(2; 0)$ de la parabole.

Partie B

1) On peut atteindre la carpe s'il existe un instant t où l'épuisette et la carpe sont au même endroit, c'est-à-dire si l'équation $f(t) = g(t)$ a au moins une solution.

$$\begin{aligned} f(t) = g(t) &\iff -t^2 + 4t - 4 = t^2 - 4t + 2 \\ &\iff -2t^2 + 8t - 6 = 0 \\ &\iff t^2 - 4t + 3 = 0 \quad (\text{on divise par } -2). \end{aligned}$$

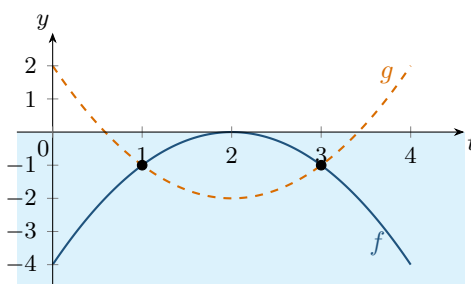
Le discriminant vaut $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$: l'équation a deux solutions. Oui, on peut atteindre la carpe.

2) Les solutions sont

$$t_1 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1 \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3,$$

toutes deux dans l'intervalle $[0; 4]$ de la trajectoire. À ces instants, $f(1) = g(1) = -1$ et $f(3) = g(3) = -1$: la carpe et l'épuisette se trouvent toutes deux à 1 dm sous la surface.

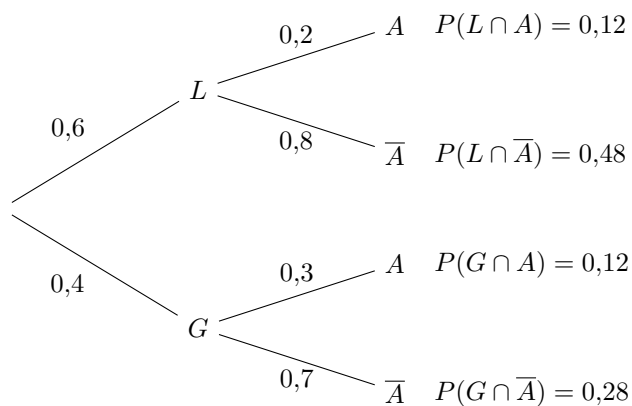
Il y a donc deux possibilités : aux instants $t = 1$ s et $t = 3$ s.



Exercice 5

4 points

- 1) D'après l'énoncé, $P(L) = 0,6$, $P(G) = 0,4$, $P_L(A) = 0,2$ et $P_G(A) = 0,3$, d'où $P_L(\bar{A}) = 0,8$ et $P_G(\bar{A}) = 0,7$.



- 2) a. On cherche $P(G \cap A)$: on multiplie les probabilités le long du chemin $G \rightarrow A$.

$$P(G \cap A) = P(G) \times P_G(A) = 0,4 \times 0,3 = \boxed{0,12}.$$

- b. L et G forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(L \cap A) + P(G \cap A) = 0,6 \times 0,2 + 0,4 \times 0,3 = 0,12 + 0,12 = \boxed{0,24}.$$

- 3) On cherche la probabilité conditionnelle $P_A(G)$:

$$P_A(G) = \frac{P(G \cap A)}{P(A)} = \frac{0,12}{0,24} = \boxed{0,5}.$$

Sachant que l'animal croisé est affamé, il y a une chance sur deux que ce soit un guépard.