

Exercice 1

3 points

- 1) On calcule le discriminant du trinôme $9x^2 - 6x + 2$:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 2 = 36 - 72 = -36.$$

Comme $\Delta < 0$, le trinôme ne s'annule pas et garde le signe de son coefficient $a = 9 > 0$. Donc, pour tout réel x , $9x^2 - 6x + 2 > 0$.

L'affirmation est vraie.

- 2) Le coefficient de x^2 est $a = -2 < 0$: la parabole est tournée vers le bas, la fonction f admet un **maximum** et pas de minimum. Ce maximum est atteint en

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \times (-2)} = 2 \quad \text{et vaut} \quad f(2) = -2 \times 4 + 8 \times 2 - 1 = 7.$$

Le nombre 7 est donc le maximum de f et non son minimum (par exemple $f(0) = -1 < 7$).

L'affirmation est fausse.

- 3) Les racines x_1 et x_2 du trinôme vérifient

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Comme $c \neq 0$, le produit $x_1 x_2$ n'est pas nul : aucune racine n'est nulle et les inverses existent. On réduit au même dénominateur :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{a} \times \frac{a}{c} = -\frac{b}{c}.$$

L'affirmation est vraie.

Exercice 2

4 points

1) On se ramène à une équation du type « $\dots = 0$ » :

$$x^2 + 4x = -2x - 9 \iff x^2 + 6x + 9 = 0.$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = 0 : \text{l'équation admet une unique solution}$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = -3.$$

(On reconnaît aussi l'identité remarquable $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.)

$$S = \{-3\}$$

$$\text{Vérification : } (-3)^2 + 4 \times (-3) = 9 - 12 = -3 \text{ et } -2 \times (-3) - 9 = 6 - 9 = -3.$$

2) On factorise : $4x^2 + 3x = x(4x + 3)$, qui s'annule en 0 et en $-\frac{3}{4}$. Tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	0	$+\infty$
x	—	—	0	+
$4x + 3$	—	0	+	+
$x(4x + 3)$	+	0	—	+

On veut un produit strictement positif :

$$S = \left] -\infty ; -\frac{3}{4} \right[\cup] 0 ; +\infty [$$

3) $\Delta = 5^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 25 - 16 = 9 = 3^2 > 0$: le trinôme a deux racines

$$x_1 = \frac{-5 - 3}{2 \times (-1)} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5 + 3}{2 \times (-1)} = 1.$$

Le coefficient $a = -1$ est négatif : le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles.

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$-x^2 + 5x - 4$	—	0	+	0	—

$$S = [1 ; 4]$$

Exercice 3

5 points

A. Étude graphique

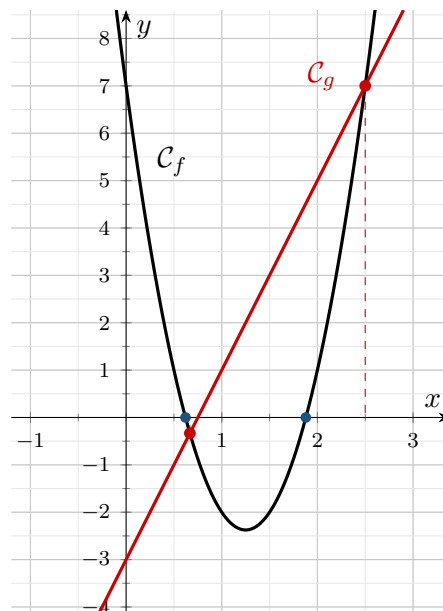
- 1) C_g est la droite d'équation $y = 4x - 3$: elle passe par les points $(0; -3)$ et $(2; 5)$ (en rouge ci-contre).

- 2) a. On cherche les abscisses des points de C_f situés sur l'axe des abscisses ou au-dessus. C_f coupe l'axe des abscisses en $x \approx 0,6$ et $x \approx 1,9$, d'où

$$S \approx]-\infty; 0,6] \cup [1,9; +\infty[$$

- b. Les solutions sont les **abscisses** des points d'intersection de C_f et C_g :

$$S \approx \{0,7; 2,5\}$$



B. Étude algébrique

- 1) $\Delta = (-15)^2 - 4 \times 6 \times 7 = 225 - 168 = 57 > 0$: f a deux racines

$$x_1 = \frac{15 - \sqrt{57}}{12} \approx 0,621 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{15 + \sqrt{57}}{12} \approx 1,879.$$

Le coefficient $a = 6$ est positif : $f(x)$ est positif à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	$\frac{15 - \sqrt{57}}{12}$	$\frac{15 + \sqrt{57}}{12}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	+

$$S = \left] -\infty; \frac{15 - \sqrt{57}}{12} \right] \cup \left[\frac{15 + \sqrt{57}}{12}; +\infty \right[$$

On en déduit que la courbe C_f est **au-dessus de l'axe des abscisses** (ou sur cet axe) sur chacun de ces deux intervalles, et strictement en dessous entre $\frac{15 - \sqrt{57}}{12}$ et $\frac{15 + \sqrt{57}}{12}$: elle coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $\frac{15 \pm \sqrt{57}}{12}$, ce qui confirme la lecture graphique (0,6 et 1,9).

- 2)

$$f(x) = g(x) \iff 6x^2 - 15x + 7 - (4x - 3) = 0 \iff 6x^2 - 19x + 10 = 0.$$

$\Delta = (-19)^2 - 4 \times 6 \times 10 = 361 - 240 = 121 = 11^2 > 0$, d'où deux solutions

$$x_1 = \frac{19 - 11}{12} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{19 + 11}{12} = \frac{5}{2}.$$

$$S = \left\{ \frac{2}{3}; \frac{5}{2} \right\}$$

Les ordonnées s'obtiennent avec g (plus simple que f) :

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = 4 \times \frac{2}{3} - 3 = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad g\left(\frac{5}{2}\right) = 4 \times \frac{5}{2} - 3 = 7.$$

$$\text{Vérification : } f\left(\frac{5}{2}\right) = 6 \times \frac{25}{4} - \frac{75}{2} + 7 = \frac{75}{2} - \frac{75}{2} + 7 = 7.$$

Les courbes se coupent aux points $P\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ et $Q\left(\frac{5}{2}; 7\right)$.

3) On étudie le signe de la différence $f(x) - g(x) = 6x^2 - 19x + 10$. C'est un trinôme de coefficient $a = 6 > 0$, de racines $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{2}$ (question 2) : il est positif à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f(x) - g(x)$		+	-	+

- Sur $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right[$ et sur $\left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$: $f(x) - g(x) > 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.
- Sur $\left]\frac{2}{3}; \frac{5}{2}\right[$: $f(x) - g(x) < 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.
- En $\frac{2}{3}$ et en $\frac{5}{2}$, les courbes se coupent (points P et Q).

Exercice 4

4 points

1) M est sur le segment $[AB]$, donc $0 \leq x \leq 10$; N est sur le segment $[BC]$, donc $0 \leq 2x \leq 10$, soit $0 \leq x \leq 5$. Les deux conditions donnent

$$x \in [0; 5]$$

2) L'aire du triangle DMN s'obtient en retirant à l'aire du carré les aires des trois triangles rectangles DAM , MBN et NCD :

- $\mathcal{A}_{DAM} = \frac{DA \times AM}{2} = \frac{10x}{2} = 5x$;
- $\mathcal{A}_{MBN} = \frac{MB \times BN}{2} = \frac{(10-x) \times 2x}{2} = x(10-x)$;
- $\mathcal{A}_{NCD} = \frac{NC \times CD}{2} = \frac{(10-2x) \times 10}{2} = 5(10-2x)$.

Pour $x = 1$: $\mathcal{A}_{DAM} = 5$, $\mathcal{A}_{MBN} = 1 \times 9 = 9$ et $\mathcal{A}_{NCD} = 5 \times 8 = 40$, donc

$$\mathcal{A}_{DMN} = 100 - (5 + 9 + 40) = 46 \text{ cm}^2.$$

3) Pour x quelconque dans $[0; 5]$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{DMN} &= 100 - [5x + x(10 - x) + 5(10 - 2x)] \\ &= 100 - (5x + 10x - x^2 + 50 - 10x) \\ &= 100 - (-x^2 + 5x + 50) \\ &= \boxed{x^2 - 5x + 50}.\end{aligned}$$

Vérification : pour $x = 1$, $1 - 5 + 50 = 46$, comme à la question 2.

4) L'aire du carré vaut 100 cm^2 , donc 45 % de cette aire vaut $0,45 \times 100 = 45 \text{ cm}^2$. On résout dans $[0; 5]$:

$$x^2 - 5x + 50 = 45 \iff x^2 - 5x + 5 = 0.$$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 25 - 20 = 5 > 0$: deux solutions

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \approx 1,382 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \approx 3,618.$$

Les deux appartiennent à $[0; 5]$: elles conviennent toutes les deux. Au millimètre près, il faut placer M tel que

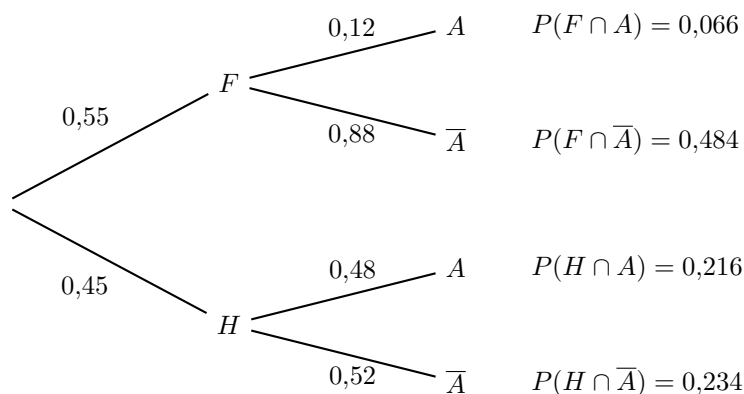
$$\boxed{AM \approx 1,4 \text{ cm} \quad \text{ou} \quad AM \approx 3,6 \text{ cm}}$$

Remarque : l'aire $x^2 - 5x + 50$ est minimale pour $x = \frac{5}{2}$ (elle vaut alors $43,75 \text{ cm}^2$) et vaut au plus 50 cm^2 sur $[0; 5]$; seules les aires comprises entre $43,75$ et 50 cm^2 sont donc possibles.

Exercice 5

4 points

1) $P(F) = 0,55$, donc $P(H) = 1 - 0,55 = 0,45$. On a $P_F(A) = 0,12$, $P_F(\bar{A}) = 0,88$, $P_H(A) = 0,48$ et $P_H(\bar{A}) = 0,52$.



Vérification : $0,066 + 0,484 + 0,216 + 0,234 = 1$.

2) $H \cap A$ est l'évènement « l'échantillon choisi est un parfum pour homme **et** de la marque Alpha ».

$$P(H \cap A) = P(H) \times P_H(A) = 0,45 \times 0,48 = \boxed{0,216}.$$

3) F et H forment une partition de l'univers; d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(A) &= P(F \cap A) + P(H \cap A) \\&= 0,55 \times 0,12 + 0,216 \\&= 0,066 + 0,216 \\&= \boxed{0,282}.\end{aligned}$$

4) On cherche $P_A(H)$:

$$P_A(H) = \frac{P(H \cap A)}{P(A)} = \frac{0,216}{0,282} \approx \boxed{0,766}.$$

Un échantillon de la marque Alpha est donc un parfum pour homme dans environ 76,6 % des cas.