

Exercice 1

6 points

- 1) a. On remplace n par 0, 1, 2 et 3 dans $v_n = 1,2^n$:

$$v_0 = 1,2^0 = \boxed{1} \quad v_1 = 1,2^1 = \boxed{1,2} \quad v_2 = 1,2^2 = \boxed{1,44} \quad v_3 = 1,2^3 = \boxed{1,728}.$$

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après les règles de calcul sur les puissances :

$$v_{n+1} = 1,2^{n+1} = 1,2^n \times 1,2 = 1,2 \times v_n.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_{n+1} = 1,2 v_n}$.

- c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1,2^n > 0$ (puissance d'un nombre strictement positif). On peut donc écrire :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1,2 > 1.$$

Comme $v_n > 0$, on multiplie par v_n sans changer le sens de l'inégalité : $v_{n+1} > v_n$.

Autre rédaction : $v_{n+1} - v_n = 1,2 v_n - v_n = 0,2 v_n > 0$.

La suite (v_n) est strictement croissante.

Vérification : $v_0 = 1 < v_1 = 1,2 < v_2 = 1,44 < v_3 = 1,728$.

- 2) a. On remplace n par 1, 2, 3 et 4 dans $u_n = -2 - 3n^2$:

$$\begin{aligned} u_1 &= -2 - 3 \times 1^2 = -2 - 3 = \boxed{-5}, & u_2 &= -2 - 3 \times 2^2 = -2 - 12 = \boxed{-14}, \\ u_3 &= -2 - 3 \times 3^2 = -2 - 27 = \boxed{-29}, & u_4 &= -2 - 3 \times 4^2 = -2 - 48 = \boxed{-50}. \end{aligned}$$

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = -2 - 3(n+1)^2$, donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -2 - 3(n+1)^2 - (-2 - 3n^2) \\ &= -2 - 3(n^2 + 2n + 1) + 2 + 3n^2 \\ &= -2 - 3n^2 - 6n - 3 + 2 + 3n^2 \\ &= -6n - 3. \end{aligned}$$

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = -6n - 3}$$

Vérification : pour $n = 1$, $u_2 - u_1 = -14 - (-5) = -9$ et $-6 \times 1 - 3 = -9$.

- c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 1$ donc $6n + 3 \geq 9 > 0$, d'où $u_{n+1} - u_n = -(6n + 3) < 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$.

La suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

Vérification : $u_1 = -5 > u_2 = -14 > u_3 = -29 > u_4 = -50$.

Exercice 2

5 points

1) On applique la relation de récurrence avec $n = 1$, puis avec $n = 2$:

$$u_2 = u_1 + \frac{2}{1} = 1 + 2 = \boxed{3} \quad u_3 = u_2 + \frac{2}{2} = 3 + 1 = \boxed{4}.$$

2) Pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{n}.$$

Or $n \geq 1 > 0$, donc $\frac{2}{n} > 0$, d'où $u_{n+1} - u_n > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$.

La suite (u_n) est strictement croissante.

Vérification : $u_1 = 1 < u_2 = 3 < u_3 = 4$.

3) On calcule les termes successifs à partir de $u_3 = 4$ en ajoutant à chaque fois $\frac{2}{n}$:

$$u_4 = u_3 + \frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \approx 4,67, \quad u_5 = u_4 + \frac{2}{4} = \frac{31}{6} \approx 5,17, \quad u_6 = u_5 + \frac{2}{5} \approx 5,57, \dots$$

Méthode à la calculatrice : on saisit 1, puis on répète l'opération « résultat précédent + $2/n$ » en augmentant n de 1 à chaque étape (ou on utilise le mode « suites » de la calculatrice avec $u_{n+1} = u_n + 2/n$, $u_1 = 1$, et on lit la table des valeurs).

Méthode avec Python : la fonction ci-dessous calcule les termes tant que $u_n \leq 7$ et renvoie le premier rang où $u_n > 7$.

```

1 def seuil():
2     n = 1
3     u = 1
4     while u <= 7:
5         u = u + 2/n
6         n = n + 1
7     return n

```

L'appel `seuil()` renvoie 12. Les dernières valeurs du tableau sont :

n	8	9	10	11	12
u_n (arrondi au centième)	6,19	6,44	6,66	6,86	7,04

On a $u_{11} \approx 6,86 \leq 7$ et $u_{12} \approx 7,04 > 7$. La suite étant croissante, tous les termes d'indice $n \leq 11$ sont inférieurs ou égaux à u_{11} , donc à 7.

Oui : le plus petit entier n tel que $u_n > 7$ est $n = 12$.

Exercice 3

4 points

- 1) Chaque terme u_{n+1} se calcule à partir du terme précédent u_n (et du premier terme $u_0 = 3$) : on ne peut pas calculer directement u_n à partir de n .

La suite (u_n) est définie par récurrence.

- 2) La variable u part de $u_0 = 3$, et chaque passage dans la boucle remplace u_k par $u_{k+1} = 3u_k - 4$.
Après n passages, u contient u_n .

```

1 def terme(n):
2     u = 3
3     for k in range(n):
4         u = 3*u - 4
5     return u

```

- 3) Il faut saisir l'instruction `terme(5)` (la boucle `for k in range(5)` est alors parcourue 5 fois).
Vérification : $u_1 = 3 \times 3 - 4 = 5$, $u_2 = 11$, $u_3 = 29$, $u_4 = 83$, $u_5 = 3 \times 83 - 4 = 245$; l'appel `terme(5)` renvoie bien 245.

Exercice 4

5 points

- 1) f est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + 2x - 3 \quad \text{donc} \quad f'(x) = x^2 + 2x - 3.$$

- 2) $f'(x)$ est un polynôme du second degré avec $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 > 0.$$

Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 - 4}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + 4}{2} = 1.$$

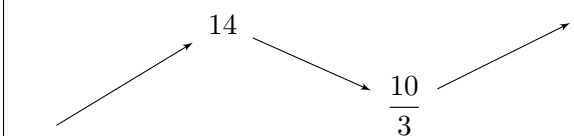
Ainsi $f'(x) = (x + 3)(x - 1)$. Le coefficient $a = 1$ est positif : $f'(x)$ est du signe de a (positif) à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$f'(x) > 0 \text{ sur }]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[, \quad f'(x) < 0 \text{ sur }]-3; 1[, \quad f'(-3) = f'(1) = 0.$$

3) Le sens de variation de f se déduit du signe de f' . On calcule les extremums :

$$f(-3) = \frac{1}{3} \times (-27) + 9 + 9 + 5 = -9 + 23 = 14, \quad f(1) = \frac{1}{3} + 1 - 3 + 5 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}.$$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f					

f est croissante sur $]-\infty; -3]$, décroissante sur $[-3; 1]$, croissante sur $[1; +\infty[$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. D'après la question précédente, f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

Pour tout entier $n \geq 1$, les nombres n et $n + 1$ appartiennent à $[1; +\infty[$ et $n < n + 1$, donc $f(n) < f(n + 1)$, c'est-à-dire $u_n < u_{n+1}$.

La suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 1.

Remarque : elle ne l'est pas dès le rang 0, car $u_0 = 5 > u_1 = \frac{10}{3}$. Ensuite $u_1 = \frac{10}{3} < u_2 = \frac{17}{3} < u_3 = 14 < \dots$