

Exercice 1

2 points

$$f(x) = 2x^3 - 6x - 1 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

1) f est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$f'(x) = 2 \times 3x^2 - 6 = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = \boxed{6(x-1)(x+1)}.$$

2) La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ a pour équation $y = f'\left(\frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{8} - 6 \times \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{4} - 3 - 1 = -\frac{15}{4} \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \left(\frac{1}{4} - 1\right) = 6 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{2}.$$

Donc

$$y = -\frac{9}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{15}{4} \iff y = -\frac{9}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{15}{4} \iff y = -\frac{9}{2}x - \frac{3}{2}.$$

La tangente a pour équation $y = -\frac{9}{2}x - \frac{3}{2}$, soit encore $y = -\frac{3}{2}(3x + 1)$.

$$\text{Vérification : pour } x = \frac{1}{2}, -\frac{9}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{15}{4} = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Exercice 2

6 points

1) $f(x) = (x^2 + 5)\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$. On pose $u(x) = x^2 + 5$ et $v(x) = \sqrt{x}$: $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = u'v + uv' = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2 + 5}{2\sqrt{x}} = \frac{2x\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + x^2 + 5}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2 + x^2 + 5}{2\sqrt{x}},$$

car $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$. Ainsi

$$\boxed{f'(x) = \frac{5x^2 + 5}{2\sqrt{x}} = \frac{5(x^2 + 1)}{2\sqrt{x}}}.$$

La courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse a si et seulement si $f'(a) = 0$, c'est-à-dire $5(a^2 + 1) = 0$. Or, pour tout réel a , $a^2 + 1 \geq 1 > 0$: le numérateur ne s'annule jamais (et même $f'(a) > 0$ pour tout $a > 0$).

Donc f' ne s'annule pas : la courbe n'admet aucune tangente horizontale.

2) $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5}$ sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur $x^2 + 5 \geq 5$ ne s'annule pas). Avec $u(x) = x^2 - 1$, $v(x) = x^2 + 5$, $u'(x) = v'(x) = 2x$:

$$g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2x(x^2 + 5) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 5)^2} = \frac{2x^3 + 10x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 5)^2} = \boxed{\frac{12x}{(x^2 + 5)^2}}.$$

Tangente au point d'abscisse 1 : $y = g'(1)(x - 1) + g(1)$, avec

$$g(1) = \frac{1-1}{1+5} = 0 \quad \text{et} \quad g'(1) = \frac{12}{6^2} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Donc $y = \frac{1}{3}(x - 1)$, soit $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

3) $h(x) = \sqrt{5x+6}$ sur $\left]-\frac{6}{5}; +\infty\right[$: sur cet intervalle $5x+6 > 0$. La fonction $x \mapsto \sqrt{ax+b}$ a pour dérivée $x \mapsto \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$, donc

$$h'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+6}}.$$

Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x est $h'(x)$; on cherche donc x tel que $h'(x) = \frac{5}{8}$:

$$\frac{5}{2\sqrt{5x+6}} = \frac{5}{8} \iff 2\sqrt{5x+6} = 8 \iff \sqrt{5x+6} = 4 \iff 5x+6 = 16 \iff x = 2.$$

($2 > -\frac{6}{5}$ convient.) La tangente est parallèle à la droite donnée au point d'abscisse $x = 2$.

Vérification : $h'(2) = \frac{5}{2\sqrt{16}} = \frac{5}{8}$.

Exercice 3

2 points

$$f(x) = x\sqrt{x} \text{ sur } [0; +\infty[.$$

1) Pour $h > 0$, le taux de variation de f entre 0 et $0+h$ vaut

$$\tau(h) = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h\sqrt{h} - 0}{h} = \sqrt{h}.$$

Or $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} = 0$: le taux de variation admet une limite finie quand h tend vers 0.

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2) La fonction racine carrée est dérivable sur $]0; +\infty[$; f y est donc dérivable comme produit, et pour $x > 0$:

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x},$$

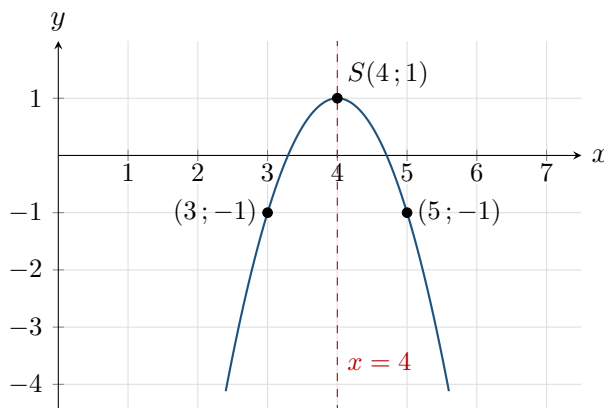
car $\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$. Avec la question 1), f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et la formule reste vraie en 0 ($\frac{3}{2}\sqrt{0} = 0 = f'(0)$) :

$$\text{pour tout } x \geq 0, \quad f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Exercice 4

6 points

- 1) $f(3) = f(5)$: par symétrie, le sommet a pour abscisse $\frac{3+5}{2} = 4$; le maximum vaut 1, la parabole est tournée vers le bas.



- 2) La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est une **parabole**.
Les points d'abscisses 3 et 5 ont la même ordonnée -1 : ils sont symétriques par rapport à l'axe de la parabole, qui passe par le milieu d'abscisse $\frac{3+5}{2} = 4$. L'axe de symétrie a pour équation $x = 4$.

Le sommet est sur l'axe et son ordonnée est le maximum 1 : $S(4; 1)$.

- 3) Le sommet est $S(4; 1)$, donc il existe un réel $a \neq 0$ tel que, pour tout réel x , $f(x) = a(x-4)^2 + 1$.
Avec $f(3) = -1$:

$$a(3-4)^2 + 1 = -1 \iff a + 1 = -1 \iff a = -2.$$

($a < 0$: on retrouve bien un maximum.) Donc $f(x) = -2(x-4)^2 + 1$.

Vérification : $f(5) = -2 \times 1 + 1 = -1$.

- 4) Pour tout réel x :

$$f(x) = -2(x^2 - 8x + 16) + 1 = -2x^2 + 16x - 32 + 1 = -2x^2 + 16x - 31.$$

- 5) $f(x) = -7 \iff -2x^2 + 16x - 31 = -7 \iff -2x^2 + 16x - 24 = 0$.

Discriminant : $\Delta = 16^2 - 4 \times (-2) \times (-24) = 256 - 192 = 64 = 8^2 > 0$. Deux solutions :

$$x_1 = \frac{-16 - 8}{2 \times (-2)} = \frac{-24}{-4} = 6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-16 + 8}{2 \times (-2)} = \frac{-8}{-4} = 2.$$

$$\mathcal{S} = \{2; 6\}$$

Autre méthode, avec la forme canonique : $-2(x-4)^2 + 1 = -7 \iff (x-4)^2 = 4 \iff x-4 = -2$
ou $x-4 = 2 \iff x = 2$ ou $x = 6$.

- 6) $f(x) > -7 \iff -2x^2 + 16x - 24 > 0$. Ce trinôme a pour racines 2 et 6 et pour coefficient $a = -2 < 0$: il est du signe de a (négatif) à l'extérieur des racines et positif entre elles. On a d'ailleurs $-2x^2 + 16x - 24 = -2(x-2)(x-6)$.

x	$-\infty$	2	6	$+\infty$	
$-2x^2 + 16x - 24$	—	0	+	0	—

$$S =]2; 6[$$

Graphiquement : la parabole est au-dessus de la droite d'équation $y = -7$ entre ses deux points d'intersection, d'abscisses 2 et 6.

Exercice 5

4 points

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x - 1}.$$

- 1) $f(x)$ existe si et seulement si $3x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq \frac{1}{3}$. Donc

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} =]-\infty; \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}; +\infty[.$$

- 2) $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x^2 + 1$ et $v(x) = 3x - 1$, deux fonctions polynômes dérivables sur $\mathbb{R}$, et v ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_f$: f est donc dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme quotient. Avec $u'(x) = 4x$ et $v'(x) = 3$, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f'(x) = \frac{4x(3x-1) - 3(2x^2+1)}{(3x-1)^2} = \frac{12x^2 - 4x - 6x^2 - 3}{(3x-1)^2} = \frac{6x^2 - 4x - 3}{(3x-1)^2}.$$

- 3) $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $a \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si $f'(a) = 0$, c'est-à-dire, le dénominateur étant non nul, $6a^2 - 4a - 3 = 0$.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 6 \times (-3) = 16 + 72 = 88 > 0$ et $\sqrt{88} = \sqrt{4 \times 22} = 2\sqrt{22}$. Deux solutions :

$$a_1 = \frac{4 - 2\sqrt{22}}{12} = \frac{2 - \sqrt{22}}{6} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{4 + 2\sqrt{22}}{12} = \frac{2 + \sqrt{22}}{6}.$$

Aucune n'est égale à $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ (car $\sqrt{22} \neq 0$) : elles sont bien dans $\mathcal{D}_f$.

$\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses $\frac{2 - \sqrt{22}}{6}$ et $\frac{2 + \sqrt{22}}{6}$ (environ $-0,45$ et $1,12$).