

Exercice 1

3,5 points

- 1) Le point $A(0; 2)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ (c'est le point de contact de la tangente (AC)), donc $f(0) = 2$.
Le point $B(2; 0)$ appartient à $\mathcal{C}_f$, donc $f(2) = 0$.

- 2) $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, c'est-à-dire de la droite (AC) :

$$f'(0) = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{2 - 0}{0 - (-2)} = \frac{2}{2}, \quad \text{donc } f'(0) = 1.$$

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1. Cette tangente est horizontale (parallèle à l'axe des abscisses), son coefficient directeur est nul : $f'(1) = 0$.

- 3) La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 0 a pour équation

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

Avec $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$: $y = x + 2$.

Vérification : le point $C(-2; 0)$ est bien sur cette droite, car $-2 + 2 = 0$.

Exercice 2

4,5 points

- 1) On a $g(3) = \frac{1}{3-2} = 1$ et, pour $h > -1$ (afin que $3+h > 2$) et $h \neq 0$, $g(3+h) = \frac{1}{3+h-2} = \frac{1}{1+h}$.
Le taux de variation de g entre 3 et $3+h$ est :

$$\begin{aligned} \tau(h) &= \frac{g(3+h) - g(3)}{(3+h) - 3} = \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \frac{\frac{1 - (1+h)}{1+h}}{h} \\ &= \frac{-h}{1+h} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{1+h}. \end{aligned}$$

En simplifiant par $h \neq 0$: $\tau(h) = \frac{-1}{1+h}$.

- 2) Quand h tend vers 0, $1+h$ tend vers 1, donc $\tau(h)$ tend vers $\frac{-1}{1} = -1$. Cette limite est un réel : g est dérivable en 3 et

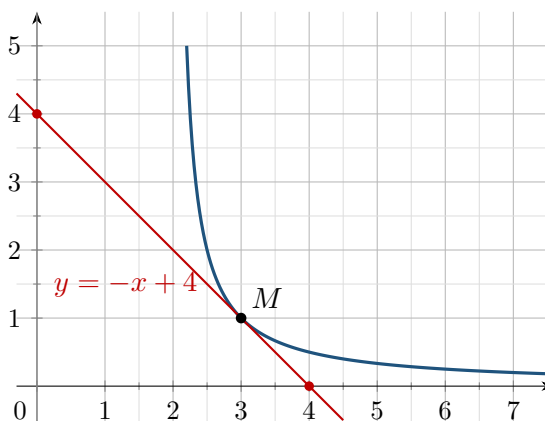
$$g'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = -1.$$

- 3) La tangente à la courbe de g au point M d'abscisse 3 a pour équation $y = g'(3)(x - 3) + g(3)$, avec $g(3) = 1$ et $g'(3) = -1$:

$$y = -1 \times (x - 3) + 1 = -x + 3 + 1, \quad \text{soit } y = -x + 4.$$

Vérification : pour $x = 3$, $-3 + 4 = 1 = g(3)$: la droite passe bien par $M(3; 1)$.

- 4) La tangente passe par $M(3; 1)$ et par le point $(0; 4)$ (ordonnée à l'origine), ou encore par $(4; 0)$:



Exercice 3

3,5 points

- 1) Le point C est diamétralement opposé à A : on l'atteint par un demi-tour, dans un sens ou dans l'autre. On peut lui associer

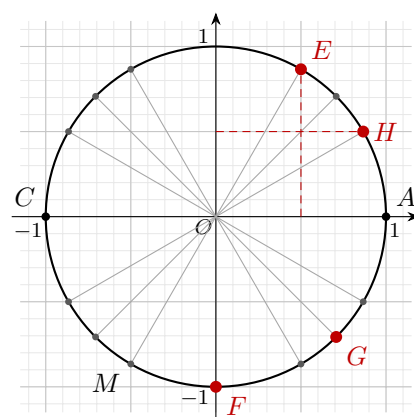
$$\pi \text{ et } -\pi.$$

Le point M est le symétrique par rapport à O du point associé à $\frac{\pi}{3}$: on l'atteint par un demi-tour suivi d'un sixième de tour, soit $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$; en retirant un tour, $\frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$. On peut lui associer

$$\frac{4\pi}{3} \text{ et } -\frac{2\pi}{3}.$$

- 2) Placement des points (constructions en pointillés sur la figure) :

- $E : \frac{\pi}{3}$ correspond à un angle de 60° dans le sens direct. Comme $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, E est le point du cercle d'abscisse $\frac{1}{2}$ situé au-dessus de l'axe des abscisses.
- $F : -\frac{\pi}{2}$ correspond à un quart de tour dans le sens indirect : $F(0; -1)$.
- $G : \frac{7\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$. G est donc aussi repéré par $-\frac{\pi}{4}$: c'est le point de la bissectrice du quatrième quart, $G\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- $H : \frac{13\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$. H est donc aussi repéré par $\frac{\pi}{6}$: c'est le point du cercle d'ordonnée $\frac{1}{2}$ situé à droite de l'axe des ordonnées.



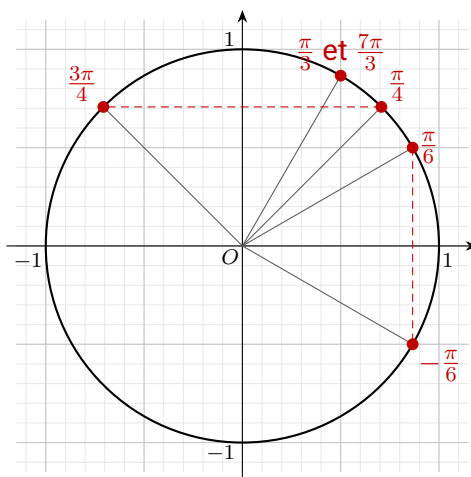
Exercice 4

4 points

1) a. Valeurs remarquables :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

b. Les réels utiles sont placés sur le cercle ci-dessous.



- $\frac{7\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$: $\frac{7\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ repèrent le même point. Pour tout réel x , $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, donc

$$\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad \sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- $\frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$: les points repérés par $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Pour tout réel x , $\cos(\pi - x) = -\cos x$, donc

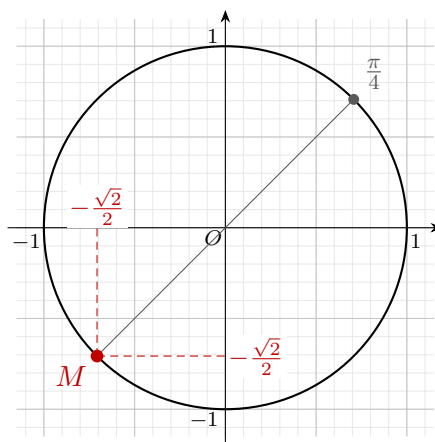
$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Les points repérés par $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Pour tout réel x , $\sin(-x) = -\sin x$, donc

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2},$$

ce qui confirme la valeur donnée au 1) a.

- 2) $\frac{5\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$: le point M est le symétrique par rapport à O du point repéré par $\frac{\pi}{4}$.



Les coordonnées de M dans le repère $(O; I, J)$ sont $\left(\cos \frac{5\pi}{4}; \sin \frac{5\pi}{4}\right)$. Pour tout réel x , $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$, donc

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Exercice 5

2 points

On utilise la correspondance : π radians $\longleftrightarrow 180^\circ$ (les mesures sont proportionnelles).

- 1) $\frac{\pi}{8} \text{ rad} \longleftrightarrow \frac{180^\circ}{8}$, soit $22,5^\circ$.
 $\frac{3\pi}{5} \text{ rad} \longleftrightarrow \frac{3 \times 180^\circ}{5} = \frac{540^\circ}{5}$, soit 108° .

- 2) $18^\circ = \frac{180^\circ}{10} \longleftrightarrow \frac{\pi}{10} \text{ rad}$.

Pour 140° , on applique la proportionnalité : $\alpha = \frac{140 \times \pi}{180} = \frac{7 \times 20 \pi}{9 \times 20}$, soit $\alpha = \frac{7\pi}{9} \text{ rad}$.

Exercice 6

2,5 points

1) Démonstration complétée (les éléments ajoutés sont en couleur) :

Soit h un réel strictement positif. Pour étudier la dérivabilité de f en 0, on détermine le taux de variation de f entre 0 et $0 + h$:

$$\tau(h) = \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

(la dernière égalité vient de $h = \sqrt{h} \times \sqrt{h}$ pour $h > 0$).

$\frac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$ quand h tend vers 0 : quand h devient très proche de 0, $\sqrt{h}$ aussi, et son inverse devient aussi grand que l'on veut.

2) Le taux de variation $\tau(h)$ n'a pas de limite **finie** quand h tend vers 0. Donc

f n'est pas dérivable en 0.

Remarque : graphiquement, la courbe de la fonction racine carrée admet au point O une tangente verticale.