

Exercice 1

3 points

1) On applique la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 2n - 3$ pour $n = 0, n = 1$ puis $n = 2$:

$$u_1 = u_0 + 2 \times 0 - 3 = 1 + 0 - 3 = -2,$$

$$u_2 = u_1 + 2 \times 1 - 3 = -2 + 2 - 3 = -3,$$

$$u_3 = u_2 + 2 \times 2 - 3 = -3 + 4 - 3 = -2.$$

On a bien $u_3 = -2$.

2) Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = 2n - 3.$$

Or $2n - 3 > 0 \iff n > \frac{3}{2}$, c'est-à-dire, pour un entier naturel, $n \geq 2$.

Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$, $u_{n+1} - u_n > 0$, soit $u_{n+1} > u_n$.

La suite (u_n) est donc **strictement croissante à partir du rang 2**.

Vérification : $u_2 = -3 < u_3 = -2 < u_4 = 1 < u_5 = 6$, alors que $u_1 = -2 > u_2 = -3$: la suite n'est pas croissante dès le rang 0 (pour $n = 0$ et $n = 1$, $2n - 3 < 0$).

Exercice 2

6 points

1) Pour tout entier $n \geq 2$, $n - 1 \geq 1 > 0$ et $2n > 0$, donc $u_n > 0$: on peut comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

On a $u_{n+1} = \frac{2(n+1)}{(n+1)-1} = \frac{2(n+1)}{n}$, donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)}{n} \times \frac{n-1}{2n} = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Comme $\frac{1}{n^2} > 0$, on obtient $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, et puisque $u_n > 0$: $u_{n+1} < u_n$.

La suite (u_n) est **strictement décroissante** (pour $n \geq 2$).

Autre méthode : $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)}{n} - \frac{2n}{n-1} = \frac{2(n^2-1) - 2n^2}{n(n-1)} = \frac{-2}{n(n-1)} < 0$.

Vérification : $u_2 = 4, u_3 = 3, u_4 = \frac{8}{3}, u_5 = \frac{5}{2}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 7 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 7 + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

Or $\left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$, donc $v_{n+1} - v_n > 0$: la suite (v_n) est **strictement croissante**.

$$\text{Vérification : } v_0 = 5, v_1 = \frac{19}{3}, v_2 = \frac{61}{9}, v_3 = \frac{187}{27}.$$

- 3) a. Pour tout entier $n \geq 1$: $0,5 > 0$, donc $0,5^n > 0$ (une puissance d'un nombre strictement positif est strictement positive); de plus $2 > 0$ et $n > 0$.

Le quotient $\frac{2 \times 0,5^n}{n}$ est donc un quotient de nombres strictement positifs : $w_n > 0$.

- b. Comme $w_n > 0$, on compare $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ à 1. Pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{2 \times 0,5^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2 \times 0,5^n} = \frac{0,5^{n+1}}{0,5^n} \times \frac{n}{n+1} = 0,5 \times \frac{n}{n+1}.$$

Or $0 < n < n+1$, donc $0 < \frac{n}{n+1} < 1$, puis $\frac{w_{n+1}}{w_n} < 0,5 < 1$.

Comme $w_n > 0$, on en déduit $w_{n+1} < w_n$: la suite (w_n) est **strictement décroissante**.

$$\text{Vérification : } w_1 = 1, w_2 = \frac{1}{4}, w_3 = \frac{1}{12}, w_4 = \frac{1}{32}.$$

Exercice 3

3 points

- 1) La suite est définie de façon explicite : $u_n = f(n)$ avec

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 \quad \text{pour } x \in [0; +\infty[.$$

- 2) f est une fonction polynôme, dérivable sur $[0; +\infty[$, et $f'(x) = 2x + 2$.

Pour $x \geq 0$, $2x + 2 \geq 2 > 0$: $f'(x) > 0$, donc f est **strictement croissante** sur $[0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

Autre justification : $f(x) = (x+1)^2$ est un polynôme du second degré de coefficient $a = 1 > 0$, dont le sommet a pour abscisse -1 ; f est donc croissante sur $[-1; +\infty[$, et en particulier sur $[0; +\infty[$.

Puisque $u_n = f(n)$ et que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n < n+1$ entraîne $f(n) < f(n+1)$, soit $u_n < u_{n+1}$.

La suite (u_n) est **strictement croissante**.

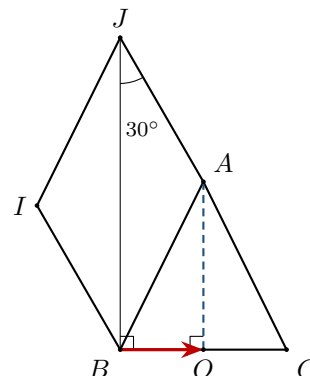
Vérification : $u_0 = 1, u_1 = 4, u_2 = 9, u_3 = 16$ (on reconnaît $u_n = (n+1)^2$).

Exercice 4

4 points

Projetés orthogonaux sur (BC) .

- ABC est isocèle en A et O est le milieu de $[BC]$: la médiane (AO) est aussi la hauteur issue de A , donc $(AO) \perp (BC)$ et le projeté orthogonal de A sur (BC) est O .
- $(BJ) \perp (BC)$: le projeté orthogonal de J sur (BC) est B .
- $BO = \frac{BC}{2} = 2$.



1) Le projeté orthogonal de A sur (BC) est O , donc

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BO}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BO}$ sont colinéaires et de même sens, donc

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = BC \times BO = 4 \times 2, \quad \boxed{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 8}.$$

2) Les projetés orthogonaux de A et de J sur (BC) sont respectivement O et B , donc

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OB}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires et de sens contraires, donc

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AJ} = -BC \times OB = -4 \times 2, \quad \boxed{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AJ} = -8}.$$

Autre méthode : $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$, d'où $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BJ} = -8 + 0 = -8$, car $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BJ}$.

3) On connaît les deux longueurs et l'angle entre les deux vecteurs :

$$\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JB} = JA \times JB \times \cos \widehat{BJA} = 4 \times 7,5 \times \cos 30^\circ = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \boxed{\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JB} = 15\sqrt{3}}.$$

Exercice 5

4 points

On utilise $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = 4$, $\vec{v}^2 = \|\vec{v}\|^2 = 9$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = 1$, et la bilinéarité du produit scalaire.

1)

$$\begin{aligned} (2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= 2\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= 2\|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{v}\|^2 \\ &= 2 \times 4 - 1 - 9 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = -2}.$

2)

$$\begin{aligned}(\vec{u} + 2\vec{v})^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2 \times \vec{u} \cdot (2\vec{v}) + \|2\vec{v}\|^2 \\&= \|\vec{u}\|^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v} + 4\|\vec{v}\|^2 \\&= 4 + 4 \times 1 + 4 \times 9\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(\vec{u} + 2\vec{v})^2 = 44}.$

3)

$$\begin{aligned}(-3\vec{u} + \vec{v})^2 &= 9\|\vec{u}\|^2 - 6\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\&= 9 \times 4 - 6 \times 1 + 9\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(-3\vec{u} + \vec{v})^2 = 39}.$

4)

$$\begin{aligned}(\vec{u} - \vec{v})^2 - (\vec{u} + \vec{v})^2 &= (\|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2) - (\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2) \\&= -4\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \times 1\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(\vec{u} - \vec{v})^2 - (\vec{u} + \vec{v})^2 = -4}.$

Vérification : avec $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{35}}{2} \end{pmatrix}$ (on a bien $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$), le calcul en coordonnées redonne -2 , 44 , 39 et -4 .