

Exercice 1

3 points

1) On sait que $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$. Donc

$$\sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \iff x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On cherche les entiers k pour lesquels ces nombres sont dans $[-\pi; 0]$.

Première famille :

$$\begin{aligned} -\pi \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 0 &\iff -\frac{5\pi}{6} \leq 2k\pi \leq \frac{\pi}{6} && \text{on ajoute } \frac{\pi}{6} \\ &\iff -\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{1}{12} && \text{on divise par } 2\pi > 0 \\ &\iff k = 0 && \text{car } k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

ce qui donne $x = -\frac{\pi}{6}$.

Seconde famille :

$$\begin{aligned} -\pi \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq 0 &\iff -\frac{13\pi}{6} \leq 2k\pi \leq -\frac{7\pi}{6} && \text{on retranche } \frac{7\pi}{6} \\ &\iff -\frac{13}{12} \leq k \leq -\frac{7}{12} && \text{on divise par } 2\pi > 0 \\ &\iff k = -1 && \text{car } k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

ce qui donne $x = \frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$.

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6} \right\}$$

2) On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et que $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$, donc $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sur le cercle trigonométrique, la droite verticale d'abscisse $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ coupe le cercle en deux points, associés à $\frac{5\pi}{6}$ et à $-\frac{5\pi}{6}$ (à 2π près). Un seul de ces réels appartient à $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ (deuxième quart du cercle) :

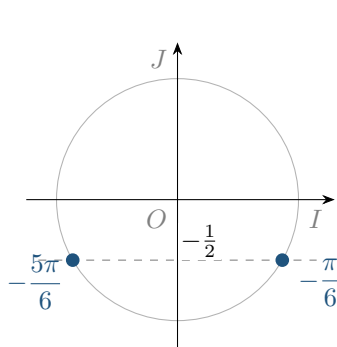
$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{5\pi}{6} \right\}$$

3) Dans $[0; 2\pi]$, les réels dont le sinus vaut $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$ (droite horizontale d'ordonnée $-\frac{\sqrt{2}}{2}$).

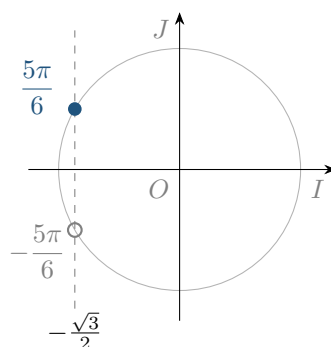
Or $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$. Seul $\frac{7\pi}{4}$ convient :

$$x = \frac{7\pi}{4}$$

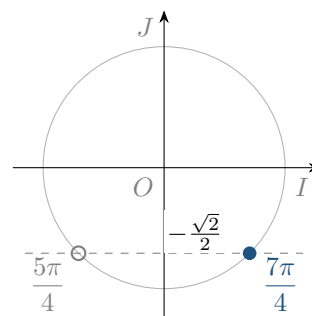
Lecture sur le cercle trigonométrique (en couleur : les solutions retenues).



Question 1)



Question 2)



Question 3)

Exercice 2

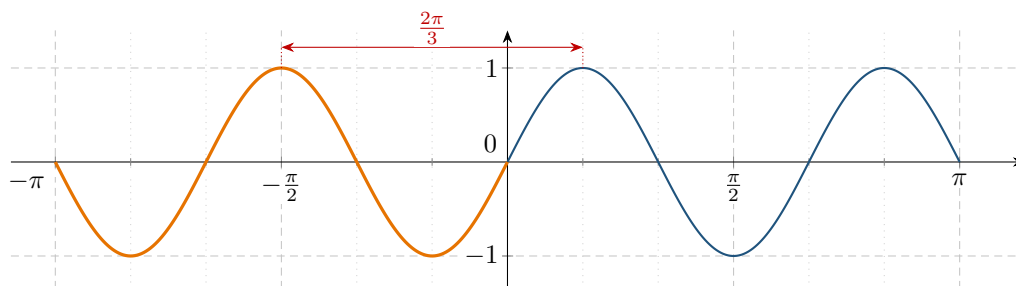
3,5 points

- 1) Pour tout réel x , $-x$ est un réel et, comme $\sin(-a) = -\sin(a)$:

$$f(-x) = \sin(-3x) = -\sin(3x) = -f(x).$$

L'ensemble de définition $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et $f(-x) = -f(x)$ pour tout réel x :
 f est impaire.

- 2) La fonction f étant impaire, sa courbe est **symétrique par rapport à l'origine** O du repère. On complète donc la courbe sur $[-\pi ; 0]$ par symétrie centrale de centre O (en orange ci-dessous).



Par exemple, le maximum atteint en $\frac{\pi}{6}$ (valeur 1) donne le minimum atteint en $-\frac{\pi}{6}$ (valeur -1).

- 3) Sur le graphique, la courbe reprend la même allure à intervalles réguliers : deux maximums consécutifs sont atteints en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{6}$, séparés de $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$. On conjecture que la plus petite période de f est $\frac{2\pi}{3}$.

Vérification : pour tout réel x ,

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sin(3x + 2\pi) = \sin(3x) = f(x),$$

car la fonction sinus est 2π -périodique. Donc f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

4) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) &= 2 \cos\left(\frac{3\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) + \pi}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{3x + 4\pi + \pi}{2}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{3x + \pi}{2} + 2\pi\right) = 2 \cos\left(\frac{3x + \pi}{2}\right) \quad (\text{cosinus est } 2\pi\text{-périodique}) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Donc g est périodique de période $\frac{4\pi}{3}$.

Exercice 3

4 points

1) **Faux.** Pour tout réel x , $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, donc $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ et

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1 \neq 2\cos^2(x) + 1.$$

Contre-exemple : pour $x = 0$, $\cos^2(0) - \sin^2(0) = 1$ alors que $2\cos^2(0) + 1 = 3$.

2) **Vrai.** Pour tout réel x , $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, donc

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - \sin^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x).$$

3) **Faux.** De $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ on déduit seulement

$$\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)} \quad \text{ou} \quad \sin(x) = -\sqrt{1 - \cos^2(x)} :$$

une racine carrée est toujours positive, alors qu'un sinus peut être négatif.

Contre-exemple : pour $x = -\frac{\pi}{2}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ alors que $\sqrt{1 - \cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{1 - 0} = 1$.

4) **Faux.** Comme $2020\pi = 1010 \times 2\pi$ et $1000\pi = 500 \times 2\pi$, la 2π -périodicité du cosinus donne, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \cos(2020\pi - x) + \cos(x + 1000\pi) &= \cos(-x) + \cos(x) \quad \text{car } \cos(a + 2k\pi) = \cos(a) \\ &= \cos(x) + \cos(x) \quad \text{car } \cos(-a) = \cos(a) \\ &= 2\cos(x). \end{aligned}$$

Cette somme n'est pas toujours nulle : pour $x = 0$ elle vaut $2 \neq 0$.

5) **Faux.** $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{1}{2}$. Le réel de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ dont le cosinus vaut $\frac{1}{2}$ est $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 4

3,5 points

1) On remplace n par 0, 1, 2 et 3 :

$$V_0 = 5 \times 0^2 - 2 \times 0 + 3 = \boxed{3}$$

$$V_1 = 5 \times 1^2 - 2 \times 1 + 3 = \boxed{6}$$

$$V_2 = 5 \times 2^2 - 2 \times 2 + 3 = \boxed{19}$$

$$V_3 = 5 \times 3^2 - 2 \times 3 + 3 = \boxed{42}$$

2) Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= 5(n+1)^2 - 2(n+1) + 3 \\ &= 5n^2 + 10n + 5 - 2n - 2 + 3 \\ &= (5n^2 - 2n + 3) + 10n + 3, \end{aligned}$$

donc $\boxed{V_{n+1} = V_n + 10n + 3}$.

Vérification : $V_1 = V_0 + 3 = 6$, $V_2 = V_1 + 13 = 19$, $V_3 = V_2 + 23 = 42$.

3) Remarque : la suite est bien définie car aucun terme ne vaut 1. En effet $U_0 = 10 > 1$ et, si $U_n > 1$, alors $U_{n+1} - 1 = \frac{U_n + 1 - (U_n - 1)}{U_n - 1} = \frac{2}{U_n - 1} > 0$, donc $U_{n+1} > 1$.

Pour tout entier naturel n , en appliquant deux fois la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} U_{n+2} &= \frac{U_{n+1} + 1}{U_{n+1} - 1} = \frac{\frac{U_n + 1}{U_n - 1} + 1}{\frac{U_n + 1}{U_n - 1} - 1} = \frac{\frac{U_n + 1 + U_n - 1}{U_n - 1}}{\frac{U_n + 1 - U_n + 1}{U_n - 1}} \quad \text{même dénominateur} \\ &= \frac{2U_n}{U_n - 1} \times \frac{U_n - 1}{2} = \frac{2U_n}{2} \quad \text{on multiplie par l'inverse} \\ &= U_n. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{U_{n+2} = U_n}$.

4) D'après la question précédente, $U_5 = U_3 = U_1$. Or

$$U_1 = \frac{U_0 + 1}{U_0 - 1} = \frac{10 + 1}{10 - 1} = \frac{11}{9}, \quad \text{donc} \quad \boxed{U_5 = \frac{11}{9}}.$$

Vérification : $U_2 = \frac{\frac{11}{9} + 1}{\frac{11}{9} - 1} = \frac{\frac{20}{9}}{\frac{2}{9}} = 10 = U_0$: les termes valent alternativement 10 et $\frac{11}{9}$.

Exercice 5

2 points

1) Au départ $n = 0$ et $w = 50 < 1000$: on entre dans la boucle.

- $n = 1$ et $w = 3 \times 50 + 2 \times 1 + 1 = 153$; $153 < 1000$, on continue;
- $n = 2$ et $w = 3 \times 153 + 2 \times 2 + 1 = 464$; $464 < 1000$, on continue;
- $n = 3$ et $w = 3 \times 464 + 2 \times 3 + 1 = 1399$; $1399 \geq 1000$, la boucle s'arrête.

n	0	1	2	3
w	50	153	464	1 399

Le programme affiche 3 : c'est le premier rang n pour lequel $W_n \geq 1000$.

2) Dans la boucle, n est augmenté de 1 **avant** le calcul de w : le terme de rang n s'obtient à partir du terme de rang $n - 1$ par $W_n = 3W_{n-1} + 2n + 1$, ce qui est la relation (c). En remplaçant n par $n + 1$, on obtient $W_{n+1} = 3W_n + 2(n + 1) + 1$, c'est-à-dire la relation (a).

La relation (b) ne convient pas : elle donnerait $W_1 = 3 \times 50 + 2 \times 0 + 1 = 151 \neq 153$.

Les relations qui conviennent sont (a) et (c).

Exercice 6

1,5 point

1) Pour tout $t \geq 0$, comme $\frac{8\pi}{3} \times 0,75 = \frac{8\pi}{3} \times \frac{3}{4} = 2\pi$:

$$\begin{aligned}
 P(t + 0,75) &= 100 - 20 \cos \left(\frac{8\pi}{3}(t + 0,75) \right) = 100 - 20 \cos \left(\frac{8\pi}{3}t + 2\pi \right) \\
 &= 100 - 20 \cos \left(\frac{8\pi}{3}t \right) \quad \text{car } \cos(a + 2\pi) = \cos(a) \\
 &= P(t).
 \end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \geq 0$, $P(t + 0,75) = P(t)$: la pression reprend les mêmes valeurs toutes les 0,75 seconde.

2) Un cycle, c'est-à-dire un battement de cœur, dure 0,75 s. En une minute, soit 60 s, le nombre de battements est donc

$$\frac{60}{0,75} = 80.$$

Le pouls de cette personne est de 80 bpm.

Exercice 7

2,5 points

1) Avec $X = \sin(x)$, on a $\sin^2(x) = X^2$ et l'équation (E) devient

$$2X^2 + X - 1 = 0.$$

2) C'est une équation du second degré avec $a = 2, b = 1, c = -1$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 = 3^2 > 0.$$

Elle admet deux solutions :

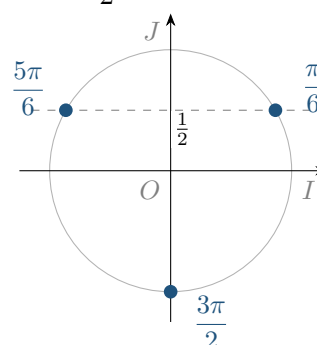
$$X_1 = \frac{-1-3}{2 \times 2} = -1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-1+3}{2 \times 2} = \frac{1}{2}, \quad \mathcal{S} = \left\{ -1; \frac{1}{2} \right\}.$$

$$\text{Vérification : } 2 \times (-1)^2 + (-1) - 1 = 0 \text{ et } 2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = 0.$$

3) Le réel x est solution de (E) si et seulement si $\sin(x) = -1$ ou $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

- Dans $[0; 2\pi[$, $\sin(x) = -1$ a pour unique solution $x = \frac{3\pi}{2}$ (point le plus bas du cercle). Attention : $-\frac{\pi}{2}$ repère le même point mais n'appartient pas à $[0; 2\pi[$.
- Dans $[0; 2\pi[$, $\sin(x) = \frac{1}{2}$ a pour solutions $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2} \right\}$$



$$\text{Vérification : pour } x = \frac{3\pi}{2}, 2 \times (-1)^2 + (-1) - 1 = 0.$$