

Calculatrice interdite

Exercice 1

3 points

Dans chaque cas, déterminer, s'ils existent, le ou les nombres réels x tels que :

- 1) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ et $x \in [-\pi; 0]$;
- 2) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$;
- 3) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(x) > 0$ et $x \in [0; 2\pi]$.

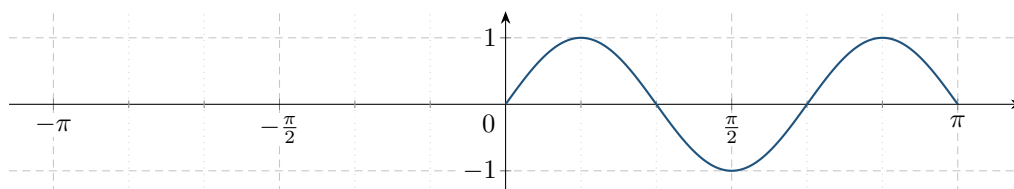
Exercice 2

3,5 points

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sin(3x) \quad \text{et} \quad g(x) = 2 \cos\left(\frac{3x + \pi}{2}\right).$$

- 1) Comparer $f(x)$ et $f(-x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
- 2) On a tracé ci-dessous la courbe représentative de f sur $[0; \pi]$. Compléter alors cette courbe sur $[-\pi; 0]$.



- 3) Conjecturer alors la plus petite période de f , puis vérifier par le calcul que ce nombre est bien une période de f .
- 4) Montrer que la fonction g est périodique de période $\frac{4\pi}{3}$.

Exercice 3

4 points

Les questions de cet exercice sont indépendantes. Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

- 1) Pour tout réel x , $\cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) + 1$.
- 2) Pour tout réel x , $\cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$.
- 3) Pour tout réel x , $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$.
- 4) Pour tout réel x , $\cos(2020\pi - x) + \cos(x + 1000\pi) = 0$.
- 5) Le nombre réel x tel que $\cos(x) = \frac{1}{2}$ et $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ est $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 4

3,5 points

Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = 5n^2 - 2n + 3$.

- 1) Calculer les quatre premiers termes de la suite (V_n) .
- 2) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n et de n .

Soit (U_n) la suite définie par son premier terme $U_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n , par la relation de récurrence $U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{U_n - 1}$.

- 3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2} = U_n$.
- 4) Calculer la valeur du terme d'indice 5 de la suite (U_n) .

Exercice 5

2 points

On considère le programme Python ci-contre.

- 1) Exécuter ce programme à la main en complétant, autant que nécessaire, le tableau ci-dessous. Qu'affiche-t-il ?

```

1 n = 0
2 w = 50
3 while w < 1000:
4     n = n + 1
5     w = 3*w + 2*n + 1
6 print(n)

```

n	0	1				
w						

- 2) Dans ce programme, les valeurs successives de w sont les termes d'une suite (W_n) de premier terme $W_0 = 50$. Parmi les relations de récurrence ci-dessous, laquelle (ou lesquelles) correspond(ent) à cette suite ? Aucune justification n'est attendue.

(a) $W_{n+1} = 3W_n + 2(n+1) + 1$ (b) $W_{n+1} = 3W_n + 2n + 1$ (c) $W_n = 3W_{n-1} + 2n + 1$

Exercice 6

1,5 point

La pression P (en millimètres de mercure, mmHg) contre les parois des vaisseaux sanguins d'une personne peut être modélisée, en fonction du temps t (en secondes), par

$$P(t) = 100 - 20 \cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right), \quad t \geq 0.$$

- 1) Vérifier que, pour tout $t \geq 0$, $P(t + 0,75) = P(t)$.
- 2) Un cycle correspond à un battement de cœur. Quel est le pouls de cette personne, en battements par minute (bpm) ?

Exercice 7

2,5 points

On se propose de résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation (E) : $2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$.

- 1) On pose $X = \sin(x)$. Que devient l'équation (E) ?
- 2) Résoudre l'équation obtenue, d'inconnue X .
- 3) En déduire les solutions de (E) dans $[0; 2\pi[$.