

Exercice 1

4,5 points

- 1) Deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx' = 0$.
Ici :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = (-1) \times m - (m+1) \times 2m = -m - 2m^2 - 2m = -2m^2 - 3m = -m(2m+3).$$

Donc

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff -m(2m+3) = 0 \iff m = 0 \text{ ou } m = -\frac{3}{2}.$$

- Pour $m = 0$: $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le vecteur nul, qui est colinéaire à tout vecteur.
- Pour $m = -\frac{3}{2}$: $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, et l'on vérifie que $\vec{v} = 3\vec{u}$.

Il existe donc bien de tels réels (il y en a même deux) : l'affirmation est vraie.

- 2) On vérifie que les coordonnées de A et de B satisfont l'équation :

$$2 \times (-2) + 5 \times 3 - 11 = -4 + 15 - 11 = 0 \quad \text{et} \quad 2 \times 3 + 5 \times 1 - 11 = 6 + 5 - 11 = 0.$$

L'équation $2x + 5y - 11 = 0$ est celle d'une droite (car $(2; 5) \neq (0; 0)$) qui passe par les deux points distincts A et B : c'est donc une équation de (AB) .

Autre méthode : $\vec{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) . Pour $M(x; y)$, $\vec{AM} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\iff \det(\vec{AM}, \vec{AB}) = 0 \iff (x+2) \times (-2) - (y-3) \times 5 = 0 \\ &\iff -2x - 5y + 11 = 0 \iff 2x + 5y - 11 = 0. \end{aligned}$$

L'affirmation est vraie.

- 3) La médiane issue de B passe par B et par le milieu I de $[AC]$:

$$x_I = \frac{-2+2}{2} = 0, \quad y_I = \frac{5+1}{2} = 3, \quad \text{donc } I(0; 3).$$

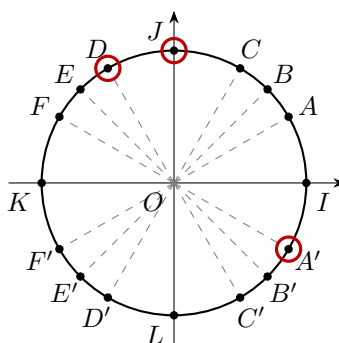
Les points $B(0; -7)$ et $I(0; 3)$ sont distincts et ont tous deux une abscisse nulle : ils sont sur l'axe des ordonnées, donc la droite (BI) est l'axe des ordonnées.

L'affirmation est vraie : la médiane issue de B est l'axe des ordonnées.

Exercice 2

4,5 points

Sur la figure, A, B, C, D, E, F sont les images de $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$, et $A', \dots, F'$ leurs symétriques par rapport à l'axe des abscisses (images des opposés). Deux réels ont la même image si et seulement si leur différence est un multiple de 2π .



En rouge : les points D, J et A' de la question 1.

- 1) a. $-\frac{4\pi}{3} = -\frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = -2\pi + \frac{2\pi}{3}$. Le réel $-\frac{4\pi}{3}$ a donc pour image le point D , et le réel de $[0; 2\pi]$ associé est $\frac{2\pi}{3}$.

- b. $\frac{13\pi}{2} = \frac{12\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 6\pi + \frac{\pi}{2} = 3 \times 2\pi + \frac{\pi}{2}$. Le réel $\frac{13\pi}{2}$ a donc pour image le point J , et le réel de $[0; 2\pi]$ associé est $\frac{\pi}{2}$.

- c. $\frac{\pi}{6}$ a pour image A , donc $-\frac{\pi}{6}$ a pour image le symétrique A' de A par rapport à l'axe des abscisses. De plus $-\frac{\pi}{6} = -2\pi + \frac{11\pi}{6}$: le réel de $[0; 2\pi]$ associé est $\frac{11\pi}{6}$.

- 2) a. On calcule la différence :

$$\frac{125\pi}{4} - \left(-\frac{35\pi}{4}\right) = \frac{160\pi}{4} = 40\pi = 20 \times 2\pi.$$

C'est un multiple de 2π : les deux réels sont associés au même point.

Vérification : $\frac{125\pi}{4} = 32\pi - \frac{3\pi}{4} = 16 \times 2\pi - \frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{35\pi}{4} = -8\pi - \frac{3\pi}{4} = -4 \times 2\pi - \frac{3\pi}{4}$: tous deux ont l'image de $-\frac{3\pi}{4}$, c'est-à-dire le point E' .

- b. On calcule la différence :

$$\frac{34\pi}{3} - \frac{67\pi}{6} = \frac{68\pi}{6} - \frac{67\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

$\frac{\pi}{6}$ n'est pas un multiple de 2π : les deux réels ne sont pas associés au même point.

Vérification : $\frac{34\pi}{3} = 6 \times 2\pi - \frac{2\pi}{3}$ (image D') et $\frac{67\pi}{6} = 6 \times 2\pi - \frac{5\pi}{6}$ (image F').

Exercice 3

4 points

1) On regroupe tous les termes dans le membre de gauche :

$$2x^2 - 3x + 1 > -x^2 + 2x - 1 \iff 3x^2 - 5x + 2 > 0.$$

Discriminant du trinôme $3x^2 - 5x + 2$: $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1 > 0$. Il a deux racines :

$$x_1 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{6} = 1.$$

Le coefficient $a = 3$ est positif : le trinôme est du signe de a (positif) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$	
$3x^2 - 5x + 2$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\mathcal{S} = \left] -\infty ; \frac{2}{3} \right[\cup] 1 ; +\infty [$$

2) Pour tout réel x :

$$f(x) - g(x) = 2x^2 - 3x + 1 - (-x^2 + 2x - 1) = 3x^2 - 5x + 2.$$

D'après le tableau de signes de la question 1 :

- sur $\left] -\infty ; \frac{2}{3} \right[$ et sur $] 1 ; +\infty [$, $f(x) - g(x) > 0$: $\mathcal{C}_1$ est au-dessus de $\mathcal{C}_2$;
- sur $\left] \frac{2}{3} ; 1 \right[$, $f(x) - g(x) < 0$: $\mathcal{C}_1$ est en dessous de $\mathcal{C}_2$;
- en $x = \frac{2}{3}$ et en $x = 1$, $f(x) = g(x)$: les courbes se coupent aux points d'abscisses $\frac{2}{3}$ et 1.

Vérification : $f(1) = 2 - 3 + 1 = 0$ et $g(1) = -1 + 2 - 1 = 0$; $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9} - 2 + 1 = -\frac{1}{9}$ et $g\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{9} + \frac{4}{3} - 1 = -\frac{1}{9}$.

Exercice 4

3,5 points

Le terrain mesure 4 dam de large et 7 dam de long : son périmètre est $2 \times (4 + 7) = 22$ dam, donc la somme largeur + longueur vaut 11 dam.

Notons x et y les nouvelles dimensions, en dam. Le périmètre est conservé et l'aire vaut 24 dam^2 :

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ xy = 24 \end{cases}$$

De la première équation, $y = 11 - x$; en remplaçant dans la seconde :

$$x(11 - x) = 24 \iff -x^2 + 11x - 24 = 0 \iff x^2 - 11x + 24 = 0.$$

Discriminant : $\Delta = (-11)^2 - 4 \times 1 \times 24 = 121 - 96 = 25 > 0$, d'où deux solutions :

$$x_1 = \frac{11 - 5}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{11 + 5}{2} = 8.$$

Pour $x = 3, y = 8$; pour $x = 8, y = 3$: dans les deux cas, le nouveau terrain mesure 3 dam sur 8 dam.

On passe donc de 4 dam à 3 dam pour la largeur (on enlève 1 dam) et de 7 dam à 8 dam pour la longueur (on ajoute 1 dam) :

la mesure cherchée est 1 dam : le nouveau terrain mesure 3 dam sur 8 dam.

Vérification : $3 \times 8 = 24 \text{ dam}^2$ et $2 \times (3 + 8) = 22$ dam.

Remarque : augmenter la largeur de 4 dam et diminuer la longueur de 4 dam donnerait 8 dam sur 3 dam, c'est-à-dire le même rectangle, la « largeur » devenant alors la plus grande dimension.

Exercice 5

3,5 points

L'équation $x^2 + 2(m+2)x + 6 - 2m^2 - m = 0$ est du second degré en x (coefficient de x^2 égal à $1 \neq 0$), avec $a = 1$, $b = 2(m+2)$ et $c = 6 - 2m^2 - m$. Elle admet deux solutions distinctes si et seulement si son discriminant est strictement positif.

$$\begin{aligned}\Delta &= [2(m+2)]^2 - 4 \times 1 \times (6 - 2m^2 - m) \\ &= 4(m^2 + 4m + 4) - 24 + 8m^2 + 4m \\ &= 12m^2 + 20m - 8 \\ &= 4(3m^2 + 5m - 2).\end{aligned}$$

Comme $4 > 0$, $\Delta > 0 \iff 3m^2 + 5m - 2 > 0$.

Discriminant du trinôme $3m^2 + 5m - 2$ (en m) : $\Delta' = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49 = 7^2 > 0$, d'où deux racines :

$$m_1 = \frac{-5 - 7}{6} = -2 \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{1}{3}.$$

Le coefficient 3 est positif : le trinôme est positif à l'extérieur des racines.

m	$-\infty$	-2	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
$3m^2 + 5m - 2$	+	0	-	0	+

L'équation admet deux solutions distinctes si et seulement si

$$m \in]-\infty; -2[\cup \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$$

Vérification : pour $m = 1$, l'équation devient $x^2 + 6x + 3 = 0$, de discriminant $36 - 12 = 24 > 0$; pour $m = 0$, elle devient $x^2 + 4x + 6 = 0$, de discriminant $16 - 24 = -8 < 0$.