

Exercice 1

6 points

- 1) Soit $M(x; y)$ un point du plan. M appartient à d_1 si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$.

On a $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-5 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} M \in d_1 &\iff (x+2) \times (-6) - (y-5) \times 5 = 0 \\ &\iff -6x - 12 - 5y + 25 = 0 \\ &\iff -6x - 5y + 13 = 0 \\ &\iff 6x + 5y - 13 = 0 \quad (\text{on multiplie par } -1) \end{aligned}$$

$$\boxed{d_1 : 6x + 5y - 13 = 0}$$

Vérification : $6 \times (-2) + 5 \times 5 - 13 = -12 + 25 - 13 = 0$, donc $A \in d_1$; et le vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} = -\vec{u}$ dirige bien d_1 .

- 2) On isole y dans l'équation cartésienne :

$$\begin{aligned} 6x + 5y - 13 = 0 &\iff 5y = -6x + 13 \\ &\iff y = -\frac{6}{5}x + \frac{13}{5} \quad (\text{on divise par } 5) \end{aligned}$$

L'équation réduite de d_1 est $y = -\frac{6}{5}x + \frac{13}{5}$, donc son coefficient directeur est $\boxed{m_1 = -\frac{6}{5}}$.

Autre méthode : avec le vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, on a $m_1 = \frac{-6}{5}$.

- 3) Le vecteur $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 5 - (-5) \\ 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_2 . Soit $M(x; y)$ un point du plan; $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x+5 \\ y-2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M \in d_2 &\iff \det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = 0 \\ &\iff (x+5) \times 2 - (y-2) \times 10 = 0 \\ &\iff 2x + 10 - 10y + 20 = 0 \\ &\iff 2x - 10y + 30 = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{d_2 : 2x - 10y + 30 = 0} \quad (\text{ou, en divisant par } 2 : x - 5y + 15 = 0)$$

Vérification : $2 \times (-5) - 10 \times 2 + 30 = 0$ et $2 \times 5 - 10 \times 4 + 30 = 0$.

- 4) On isole y dans l'équation cartésienne de d_2 :

$$\begin{aligned} 2x - 10y + 30 = 0 &\iff 10y = 2x + 30 \\ &\iff y = \frac{1}{5}x + 3 \quad (\text{on divise par } 10) \end{aligned}$$

$$d_2 : y = \frac{1}{5}x + 3$$

- 5) Les coefficients directeurs sont $m_1 = -\frac{6}{5}$ et $m_2 = \frac{1}{5}$. Comme $m_1 \neq m_2$, les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles : elles sont **sécantes**.

Autre justification : $\det(\vec{u}, \vec{BC}) = 5 \times 2 - (-6) \times 10 = 70 \neq 0$, donc les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

Les coordonnées du point d'intersection I vérifient le système

$$\begin{cases} 6x + 5y - 13 = 0 \\ y = \frac{1}{5}x + 3 \end{cases}$$

On remplace y dans la première équation :

$$\begin{aligned} 6x + 5\left(\frac{1}{5}x + 3\right) - 13 &= 0 \iff 6x + x + 15 - 13 = 0 \\ &\iff 7x + 2 = 0 \\ &\iff x = -\frac{2}{7} \end{aligned}$$

$$\text{Puis } y = \frac{1}{5} \times \left(-\frac{2}{7}\right) + 3 = -\frac{2}{35} + \frac{105}{35} = \frac{103}{35}.$$

$$I\left(-\frac{2}{7}; \frac{103}{35}\right)$$

$$\text{Vérification dans } d_1 : 6 \times \left(-\frac{2}{7}\right) + 5 \times \frac{103}{35} = -\frac{60}{35} + \frac{515}{35} = \frac{455}{35} = 13.$$

Exercice 2

4 points

- 1) On a $\vec{AM} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc

$$\det(\vec{AM}, \vec{v}) = x \times (-2) - (y+3) \times (-5) = -2x + 5y + 15.$$

$$\det(\vec{AM}, \vec{v}) = -2x + 5y + 15$$

- 2) $M \in d$ si et seulement si $\vec{AM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si $\det(\vec{AM}, \vec{v}) = 0$. D'après la question 1 :

$$d : -2x + 5y + 15 = 0$$

3) On remplace les coordonnées de $B(3; -2)$ dans l'équation :

$$-2 \times 3 + 5 \times (-2) + 15 = -6 - 10 + 15 = -1 \neq 0.$$

Les coordonnées de B ne vérifient pas l'équation de d : $B \notin d$.

4) Un point de l'axe des ordonnées a une abscisse nulle. On remplace x par 0 dans l'équation de d :

$$\begin{aligned} -2 \times 0 + 5y + 15 &= 0 \iff 5y = -15 \\ \iff y &= -3 \end{aligned}$$

Le point d'intersection de d et de l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $(0; -3)$, c'est-à-dire le point A lui-même (son abscisse est nulle).

Exercice 3

4 points

1) $f(x) = 0 \iff -x^2 + x + 2 = 0$: trinôme avec $a = -1, b = 1, c = 2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9 = 3^2 > 0.$$

L'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 3}{-2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 3}{-2} = -1.$$

$$\mathcal{S} = \{-1; 2\}$$

Vérification : $f(2) = -4 + 2 + 2 = 0$ et $f(-1) = -1 - 1 + 2 = 0$.

2) On se ramène à une équation du second degré :

$$\begin{aligned} f(x) = 3 &\iff -x^2 + x + 2 = 3 \\ &\iff -x^2 + x - 1 = 0 \quad (\text{on retranche } 3) \end{aligned}$$

Avec $a = -1, b = 1, c = -1$:

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 1 - 4 = -3 < 0.$$

L'équation n'admet aucune solution réelle :

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

Exercice 4

6 points

1) On calcule les images de 0 :

$$f(0) = (0 + 1)^2 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad g(0) = -2 \times 0^2 - 3 \times 0 + 2 = 2.$$

La courbe $\mathcal{C}_1$ passe par l'origine du repère et la courbe $\mathcal{C}_2$ par le point de coordonnées $(0; 2)$. De plus, $f(x) = x^2 + 2x$ a un coefficient de x^2 positif (parabole tournée vers le haut, comme $\mathcal{C}_1$) et g un coefficient $-2 < 0$ (parabole tournée vers le bas, comme $\mathcal{C}_2$).

$\mathcal{C}_1$ représente f et $\mathcal{C}_2$ représente g

- 2) $g(x) = -2x^2 - 3x + 2$ avec $a = -2, b = -3, c = 2$. La forme canonique s'écrit $g(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \times (-2)} = -\frac{3}{4}$$

et

$$\begin{aligned}\beta &= g\left(-\frac{3}{4}\right) = -2 \times \frac{9}{16} - 3 \times \left(-\frac{3}{4}\right) + 2 \\ &= -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + \frac{16}{8} = \frac{25}{8}.\end{aligned}$$

$$g(x) = -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}$$

Vérification : $-2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) + \frac{25}{8} = -2x^2 - 3x - \frac{9}{8} + \frac{25}{8} = -2x^2 - 3x + 2$. On retrouve le sommet de $\mathcal{C}_2$, de coordonnées $\left(-\frac{3}{4}; \frac{25}{8}\right)$, conforme au graphique.

- 3) a. Un point d'abscisse x est commun aux deux courbes si et seulement si $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned}f(x) = g(x) &\iff (x+1)^2 - 1 = -2x^2 - 3x + 2 \\ &\iff x^2 + 2x + 1 - 1 = -2x^2 - 3x + 2 \\ &\iff x^2 + 2x + 2x^2 + 3x - 2 = 0 \\ &\iff 3x^2 + 5x - 2 = 0\end{aligned}$$

Les abscisses des points d'intersection sont donc les solutions de $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

- b. Avec $a = 3, b = 5, c = -2$:

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49 = 7^2 > 0.$$

$$x_1 = \frac{-5 - 7}{6} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{1}{3}.$$

On calcule les ordonnées avec f (on peut contrôler avec g) :

$$f(-2) = (-1)^2 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 1 = \frac{16}{9} - \frac{9}{9} = \frac{7}{9}.$$

$$\text{Contrôle : } g(-2) = -8 + 6 + 2 = 0 \text{ et } g\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{9} - 1 + 2 = \frac{7}{9}.$$

Les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en deux points (ce qui est cohérent avec le graphique) :

$$(-2; 0) \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{3}; \frac{7}{9}\right)$$