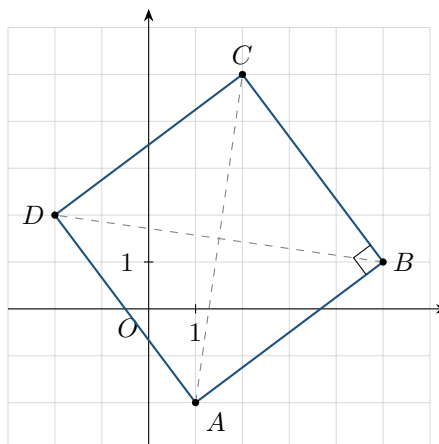


Exercice 1

5 points

1) Figure (le point D est obtenu à la question 2) :



2) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2-5 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} x_D-1 \\ y_D+2 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \iff \begin{cases} x_D-1 = -3 \\ y_D+2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = 2 \end{cases} \quad \boxed{D(-2; 2)}$$

Vérification : les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ doivent avoir le même milieu.

$$\text{milieu de } [AC] : \left(\frac{1+2}{2}; \frac{-2+5}{2} \right) = (1,5; 1,5), \quad \text{milieu de } [BD] : \left(\frac{5-2}{2}; \frac{1+2}{2} \right) = (1,5; 1,5).$$

3) Le repère est orthonormé, on peut calculer des longueurs.

$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5, \quad BC = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,$$

$$AC = \sqrt{(2-1)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}.$$

- $AB = BC$: le parallélogramme $ABCD$ a deux côtés consécutifs de même longueur, c'est donc un **losange**.
- $AB^2 + BC^2 = 25 + 25 = 50 = AC^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B . Le parallélogramme $ABCD$ a un angle droit, c'est donc un **rectangle**.

$ABCD$ est à la fois un losange et un rectangle :

$ABCD$ est un carré.

4) La bordure fait le tour du carré $ABCD$, de côté $AB = 5$ m :

$$\mathcal{P} = 4 \times 5 = \boxed{20 \text{ m de bordure.}}$$

Exercice 2

4 points

- 1) La médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points situés à égale distance de A et de B . Le repère étant orthonormé :

$$CA^2 = (-2 - 6)^2 + (1 + 5,5)^2 = 64 + 42,25 = 106,25,$$

$$CB^2 = (2 - 6)^2 + (4 + 5,5)^2 = 16 + 90,25 = 106,25.$$

Donc $CA^2 = CB^2$, et comme des distances sont positives, $CA = CB$.

C appartient à la médiatrice de $[AB]$.

- 2) Le centre du cercle de diamètre $[BC]$ est le milieu M de $[BC]$:

$$M\left(\frac{2+6}{2}; \frac{4-5,5}{2}\right) = M(4; -0,75).$$

Son rayon est $r = MB$:

$$MB^2 = (2 - 4)^2 + (4 + 0,75)^2 = 4 + 22,5625 = 26,5625.$$

Distance du centre au point D :

$$MD^2 = (4 - 4)^2 + (-6 + 0,75)^2 = 0 + 27,5625 = 27,5625.$$

$MD^2 \neq MB^2$, donc $MD \neq r$ ($MD = 5,25$ alors que $r \approx 5,15$) :

D n'appartient pas au cercle de diamètre $[BC]$.

Autre méthode : D est sur ce cercle si et seulement si le triangle BDC est rectangle en D . Or $DB^2 + DC^2 = 104 + 4,25 = 108,25 \neq BC^2 = 106,25$: le triangle n'est pas rectangle en D , même conclusion.

Exercice 3

6 points

- 1)

$$\overrightarrow{RS} \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ 0 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{RT} \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ -3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Déterminant des deux vecteurs :

$$\det(\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT}) = 6 \times (-6) - (-3) \times 3 = -36 + 9 = -27 \neq 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ ne sont pas colinéaires, donc R, S et T ne sont pas alignés.

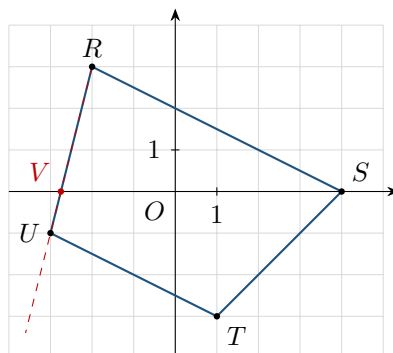
2) a. $-\frac{2}{3}\vec{RS}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \times 6 \\ -\frac{2}{3} \times (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, et $\vec{TU} \begin{pmatrix} x_U - 1 \\ y_U + 3 \end{pmatrix}$.

$$\vec{TU} = -\frac{2}{3}\vec{RS} \iff \begin{cases} x_U - 1 = -4 \\ y_U + 3 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_U = -3 \\ y_U = -1 \end{cases} \quad \boxed{U(-3; -1)}$$

b. De $\vec{TU} = -\frac{2}{3}\vec{RS}$ on tire $\vec{UT} = \frac{2}{3}\vec{RS}$: les vecteurs $\vec{RS}$ et $\vec{UT}$ sont colinéaires (et de même sens), donc les droites (RS) et (UT) sont parallèles. Comme R, S, T ne sont pas alignés, ces droites sont distinctes : le quadrilatère $RSTU$ a deux côtés opposés $[RS]$ et $[TU]$ parallèles.

$RSTU$ est un trapèze de bases $[RS]$ et $[TU]$.

Ce n'est **pas un parallélogramme** : il faudrait $\vec{UT} = \vec{RS}$, or $\vec{UT} = \frac{2}{3}\vec{RS} \neq \vec{RS}$ (la base $[TU]$ est plus courte que $[RS]$).



3) On réordonne la somme pour enchaîner les vecteurs (relation de Chasles) :

$$\vec{RS} + \vec{TU} + \vec{ST} = \vec{RS} + \vec{ST} + \vec{TU} = \vec{RT} + \vec{TU} = \boxed{\vec{RU}}.$$

Vérification : avec $\vec{ST} \begin{pmatrix} 1 - 4 \\ -3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$:

$$\vec{RS} + \vec{TU} + \vec{ST} \begin{pmatrix} 6 - 4 - 3 \\ -3 + 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{RU} \begin{pmatrix} -3 - (-2) \\ -1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées sont les mêmes : le résultat est confirmé.

4) V est sur l'axe des abscisses, donc $V(x; 0)$. Il est sur la droite (RU) si et seulement si R, U, V sont alignés, c'est-à-dire si $\vec{RV} \begin{pmatrix} x + 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{RU} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires :

$$\begin{aligned} \det(\vec{RV}, \vec{RU}) = 0 &\iff (x + 2) \times (-4) - (-3) \times (-1) = 0 \\ &\iff -4x - 8 - 3 = 0 \\ &\iff -4x = 11 \\ &\iff x = -\frac{11}{4}. \end{aligned}$$

$$V\left(-\frac{11}{4}; 0\right) \text{ soit } V(-2,75; 0).$$

$$\text{Vérification : } \overrightarrow{RV}\left(\begin{matrix} -0,75 \\ -3 \end{matrix}\right) = 0,75 \overrightarrow{RU}.$$

Exercice 4

5 points

- 1) La matière grasse représente 68 % de la matière sèche, qui représente elle-même 49 % du fromage. On applique deux proportions successives : on multiplie les proportions.

$$0,68 \times 0,49 = 0,3332.$$

Le fromage contient réellement 33,32 % de matière grasse.

- 2) a. Notons m la masse totale de la solution, en grammes. Le sel en représente 1,5 % :

$$0,015 \times m = 35 \iff m = \frac{35}{0,015} = \frac{7\,000}{3} \approx 2\,333,33 \text{ g.}$$

La masse d'eau est la masse totale moins celle du sel :

$$m_{\text{eau}} = \frac{7\,000}{3} - 35 = \frac{6\,895}{3} \approx 2\,298,33 \text{ g.}$$

Il faut environ 2 298 g d'eau.

$$\text{Vérification : } \frac{35}{35 + 2\,298,33} \approx 0,0150, \text{ soit bien } 1,5 \%.$$

- b. 1 000 g d'eau occupent 1 L = 1 000 mL : 1 g d'eau occupe donc 1 mL. Le volume d'eau est

$$V = \frac{6\,895}{3} \text{ mL} \approx 2\,298,33 \text{ mL.}$$

$V \approx 2\,298 \text{ mL}$, soit environ 2,3 L.