

Exercice 1

8 points

Développer et réduire

- On distribue, en n'oubliant pas que le signe « $-$ » devant la parenthèse change tous les signes :

$$A = 4(2x - 3) - (7 - x) = 8x - 12 - 7 + x = \boxed{9x - 19}.$$

- On regroupe d'abord -2 avec le premier facteur : $-2(5 - x) = -10 + 2x$, puis on développe :

$$\begin{aligned} B &= (2x - 10)(2 - 3x) \\ &= 2x \times 2 + 2x \times (-3x) - 10 \times 2 - 10 \times (-3x) \\ &= 4x - 6x^2 - 20 + 30x \\ &= \boxed{-6x^2 + 34x - 20}. \end{aligned}$$

- On utilise l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 3x$ et $b = \frac{1}{2}$:

$$C = (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{9x^2 - 3x + \frac{1}{4}}.$$

- On développe $-3x(x + 1)$ puis on réduit :

$$D = -3x^2 - 3x + x - 2 = \boxed{-3x^2 - 2x - 2}.$$

Vérification (pour $x = 1$) : $A = 4 \times (-1) - 6 = -10 = 9 - 19$; $B = -2 \times 4 \times (-1) = 8 = -6 + 34 - 20$;
 $C = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} = 9 - 3 + \frac{1}{4}$; $D = -6 + 1 - 2 = -7 = -3 - 2 - 2$.

Factoriser

- Le facteur commun est $10x$:

$$E = 10x \times 1 - 10x \times x = \boxed{10x(1 - x)}.$$

- Le facteur commun est $(6x - 1)$:

$$\begin{aligned} F &= (6x - 1)[(2x + 5) - (3 - x)] \\ &= (6x - 1)(2x + 5 - 3 + x) \\ &= \boxed{(6x - 1)(3x + 2)}. \end{aligned}$$

- Le facteur commun est $(2x + 3)$; on écrit $(2x + 3) = (2x + 3) \times 1$:

$$G = (2x + 3)[(3x - 1) - 1] = \boxed{(2x + 3)(3x - 2)}.$$

- Le facteur commun est $(2x - 5)$; on écrit $(2x - 5) = (2x - 5) \times 1$:

$$\begin{aligned} H &= (2x - 5)[2(2x - 5) + 1] \\ &= (2x - 5)(4x - 10 + 1) \\ &= \boxed{(2x - 5)(4x - 9)}. \end{aligned}$$

Vérification (en redéveloppant) : $(6x - 1)(3x + 2) = 18x^2 + 9x - 2$, qui est bien la forme développée de F ; $(2x + 3)(3x - 2) = 6x^2 + 5x - 6$, comme G ; $(2x - 5)(4x - 9) = 8x^2 - 38x + 45$, comme H .

Exercice 2

4 points

- 1) On développe chaque carré avec les identités remarquables :

$$(2x - 2)^2 = 4x^2 - 8x + 4 \quad \text{et} \quad (5x + 3)^2 = 25x^2 + 30x + 9.$$

Attention : le signe « $-$ » porte sur tout le second carré.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2 - 8x + 4 - (25x^2 + 30x + 9) \\ &= 4x^2 - 8x + 4 - 25x^2 - 30x - 9 \\ &= \boxed{-21x^2 - 38x - 5}. \end{aligned}$$

- 2) $f(x)$ est de la forme $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a = 2x - 2$ et $b = 5x + 3$:

$$\begin{aligned} f(x) &= [(2x - 2) - (5x + 3)][(2x - 2) + (5x + 3)] \\ &= (2x - 2 - 5x - 3)(2x - 2 + 5x + 3) \\ &= \boxed{(-3x - 5)(7x + 1)}. \end{aligned}$$

Vérification : $(-3x - 5)(7x + 1) = -21x^2 - 3x - 35x - 5 = -21x^2 - 38x - 5$: on retrouve la forme développée.

- 3) On utilise la forme factorisée. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul :

$$-3x - 5 = 0 \iff -3x = 5 \iff x = -\frac{5}{3} \quad \text{ou} \quad 7x + 1 = 0 \iff 7x = -1 \iff x = -\frac{1}{7}.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{5}{3}; -\frac{1}{7} \right\}$$

Vérification : pour $x = -\frac{5}{3}$, $2x - 2 = -\frac{16}{3}$ et $5x + 3 = -\frac{16}{3}$: les deux carrés sont égaux, donc $f(x) = 0$. Pour $x = -\frac{1}{7}$, $2x - 2 = -\frac{16}{7}$ et $5x + 3 = \frac{16}{7}$: mêmes carrés, $f(x) = 0$.

Exercice 3

4 points

1) On reconnaît l'identité $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 6x$ et $b = 1$: $36x^2 - 12x + 1 = (6x - 1)^2$.

$$36x^2 - 12x + 1 = 0 \iff (6x - 1)^2 = 0 \iff 6x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{6}.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{6} \right\}$$

Vérification : $36 \times \frac{1}{36} - 12 \times \frac{1}{6} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$.

2) On développe le membre de droite; les termes en x^2 s'éliminent :

$$\begin{aligned} x^2 - 25 &= (x - 5)^2 \iff x^2 - 25 = x^2 - 10x + 25 \\ &\iff 10x = 50 && \text{(on retranche } x^2, \text{ on ajoute } 10x + 25) \\ &\iff x = 5. \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \{5\}$$

Autre méthode : $x^2 - 25 - (x - 5)^2 = (x - 5)(x + 5) - (x - 5)^2 = (x - 5)[(x + 5) - (x - 5)] = 10(x - 5)$, nul pour $x = 5$ seulement.

3) On factorise par $(x + 1)$:

$$\begin{aligned} (x + 1)(x + 3) - (x + 1)^2 &= 0 \iff (x + 1)[(x + 3) - (x + 1)] = 0 \\ &\iff (x + 1) \times 2 = 0 \\ &\iff x + 1 = 0 \iff x = -1. \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \{-1\}$$

4) On fait apparaître le facteur commun : $10x - 2 = 2(5x - 1)$.

$$\begin{aligned} (5x - 1)(x + 2) + 10x - 2 &= 0 \iff (5x - 1)(x + 2) + 2(5x - 1) = 0 \\ &\iff (5x - 1)[(x + 2) + 2] = 0 \\ &\iff (5x - 1)(x + 4) = 0. \end{aligned}$$

Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul :

$$5x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{5} \quad \text{ou} \quad x + 4 = 0 \iff x = -4.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -4; \frac{1}{5} \right\}$$

Vérification : pour $x = -4$, $(-21) \times (-2) + (-40) - 2 = 42 - 42 = 0$.

Exercice 4

4 points

Une fonction affine s'écrit $x \mapsto ax + b$: l'ordonnée à l'origine b se lit au point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées, et le coefficient directeur a est la variation de y quand x augmente de 1, soit $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ pour deux points A et B de la droite.

- $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées en $(0; 1)$, donc $b = 1$. Elle passe aussi par $(4; -2)$, d'où

$$a = \frac{-2 - 1}{4 - 0} = -\frac{3}{4}.$$

- $\mathcal{C}_g$ passe par l'origine, donc $b = 0$ (g est linéaire). Elle passe par $(4; 1)$: $a = \frac{1 - 0}{4 - 0} = \frac{1}{4}$.

- $\mathcal{C}_h$ coupe l'axe des ordonnées en $(0; 2)$, donc $b = 2$. Elle passe par $(6; 3)$: $a = \frac{3 - 2}{6 - 0} = \frac{1}{6}$.

- $\mathcal{C}_i$ est parallèle à l'axe des abscisses, à la hauteur -3 : $a = 0$ et $b = -3$ (i est constante).

Fonction	a	b	Expression
f	$-\frac{3}{4}$	1	$f(x) = -\frac{3}{4}x + 1$
g	$\frac{1}{4}$	0	$g(x) = \frac{1}{4}x$
h	$\frac{1}{6}$	2	$h(x) = \frac{1}{6}x + 2$
i	0	-3	$i(x) = -3$

Vérification avec un troisième point de chaque droite : $f(-4) = 3 + 1 = 4$, et $\mathcal{C}_f$ passe bien par $(-4; 4)$; $g(-4) = -1$, point $(-4; -1)$; $h(-6) = -1 + 2 = 1$, point $(-6; 1)$.