

Exercice 1

8 points

- 1) La courbe $\mathcal{C}$ commence au point d'abscisse -7 et s'arrête au point d'abscisse 2 (les deux extrémités sont marquées) :

$$D_f = [-7; 2]$$

- 2) On lit les ordonnées des points de $\mathcal{C}$ d'abscisses 2 et -3 (figure ci-dessous) :

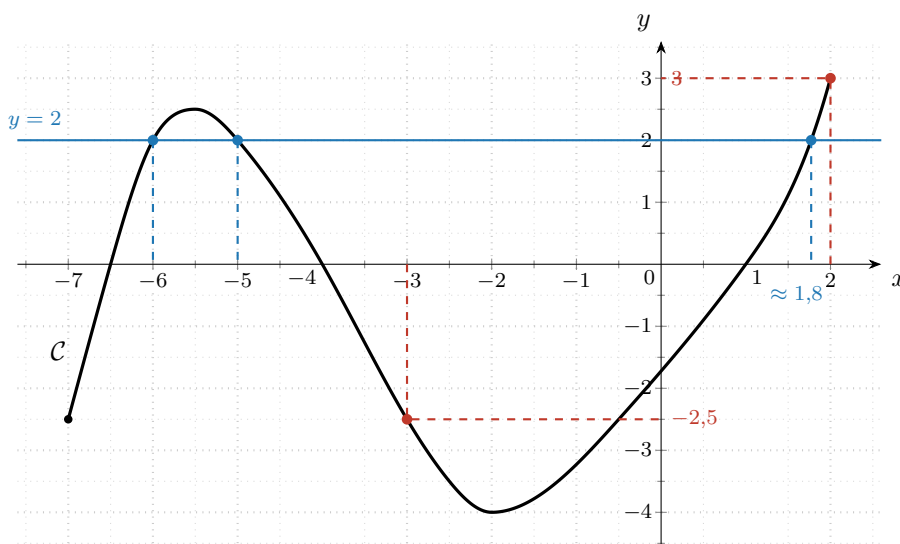
$$f(2) = 3$$

et

$$f(-3) = -2,5$$

- 3) Les antécédents de 2 sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite horizontale d'équation $y = 2$. Elle coupe $\mathcal{C}$ en trois points, d'où :

$$\text{les antécédents de } 2 \text{ sont } -6, -5 \text{ et environ } 1,8$$



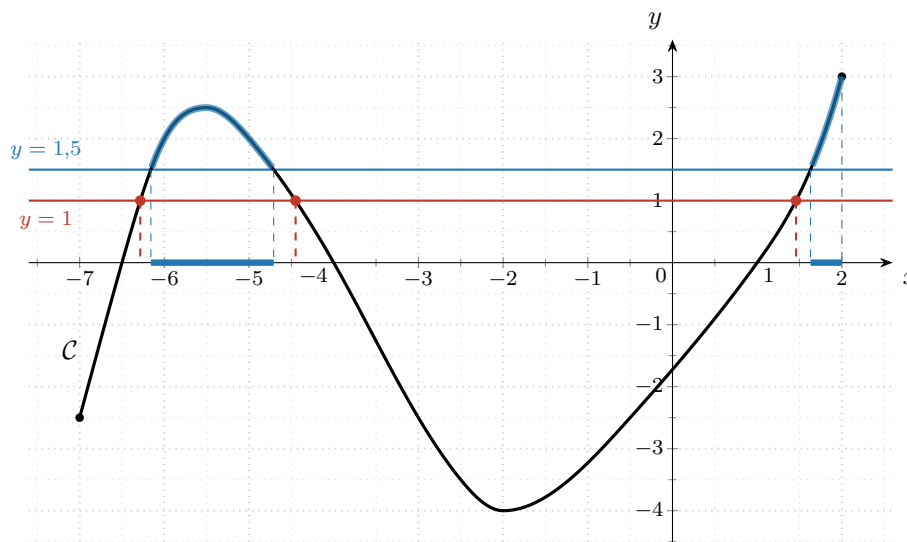
- 4) On trace la droite d'équation $y = 1$: elle coupe $\mathcal{C}$ en trois points, dont on lit les abscisses.

$$S \approx \{-6,3; -4,5; 1,5\}$$

(lectures graphiques, à environ 0,1 près).

- 5) On trace la droite d'équation $y = 1,5$. Les solutions de $f(x) > 1,5$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}$ situés **strictement au-dessus** de cette droite (parties en couleur ci-dessous). Les points d'intersection, d'abscisses environ $-6,2$, $-4,7$ et $1,6$, sont exclus (inégalité stricte); en revanche $x = 2$ convient car $f(2) = 3 > 1,5$.

$$S \approx]-6,2; -4,7[\cup]1,6; 2]$$

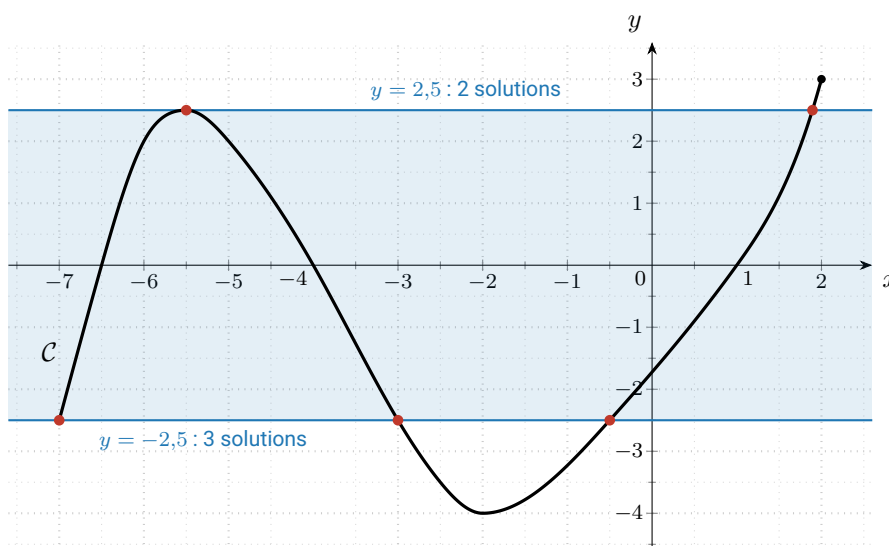


En rouge : les trois solutions de $f(x) = 1$ (question 4). En bleu : la partie de $\mathcal{C}$ au-dessus de la droite $y = 1,5$ et, sur l'axe des abscisses, l'ensemble des solutions de $f(x) > 1,5$.

6) Les solutions de $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite horizontale d'équation $y = m$. On fait « glisser » cette droite de bas en haut :

- pour $m < -4$ ou $m > 3$: aucune solution; pour $m = -4$: une seule solution ($x = -2$);
- pour $-4 < m < -2,5$: deux solutions (la droite ne rencontre pas la partie gauche de la courbe, qui commence à $f(-7) = -2,5$);
- pour $m = -2,5$: trois solutions, -7 , -3 et $-0,5$ (le point $(-7; -2,5)$ appartient à $\mathcal{C}$);
- pour $-2,5 < m < 2,5$: trois solutions;
- pour $m = 2,5$: deux solutions ($x = -5,5$, sommet de la courbe, et une autre proche de $1,9$);
- pour $2,5 < m \leq 3$: une seule.

$$f(x) = m \text{ admet exactement 3 solutions pour } m \in [-2,5; 2,5[$$



7) a. g est une fonction affine : sa représentation est une droite. Il suffit de deux points :

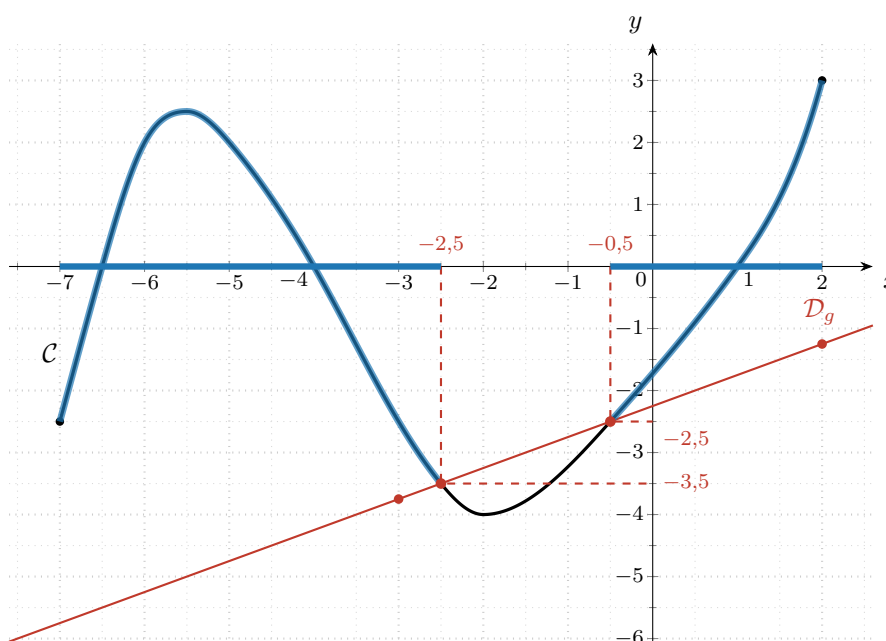
x	-3	2
$g(x) = 0,5x - 2,25$	$0,5 \times (-3) - 2,25 = -3,75$	$0,5 \times 2 - 2,25 = -1,25$

On trace la droite passant par $(-3; -3,75)$ et $(2; -1,25)$; elle coupe l'axe des ordonnées en $-2,25$ (ordonnée à l'origine).

b. On cherche les abscisses des points de $\mathcal{C}$ situés **sur ou au-dessus** de la droite $\mathcal{D}_g$. La courbe et la droite se coupent en deux points, d'abscisses $-2,5$ et $-0,5$; on vérifie avec la formule : $g(-2,5) = -3,5$ et $g(-0,5) = -2,5$, ordonnées lues sur $\mathcal{C}$.

- sur $[-7; -2,5]$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}_g$ (par exemple $f(-7) = -2,5 > g(-7) = -5,75$);
- sur $] -2,5; -0,5[$, $\mathcal{C}$ est en dessous (par exemple $f(-2) = -4 < g(-2) = -3,25$);
- sur $[-0,5; 2]$, $\mathcal{C}$ est au-dessus (par exemple $f(2) = 3 > g(2) = -1,25$).

$$S = [-7; -2,5] \cup [-0,5; 2]$$

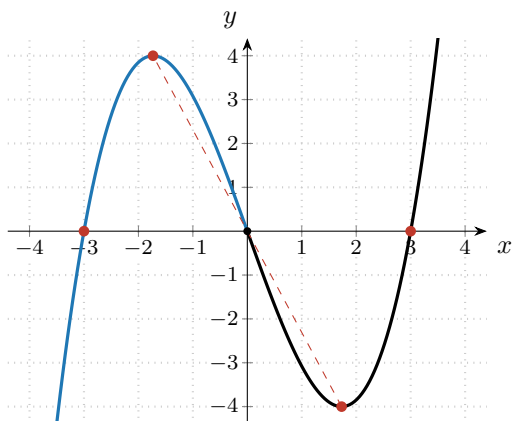


En rouge : la droite $\mathcal{D}_g$ et ses deux points d'intersection avec $\mathcal{C}$. En bleu : la partie de $\mathcal{C}$ sur ou au-dessus de $\mathcal{D}_g$ et l'ensemble des solutions sur l'axe des abscisses.

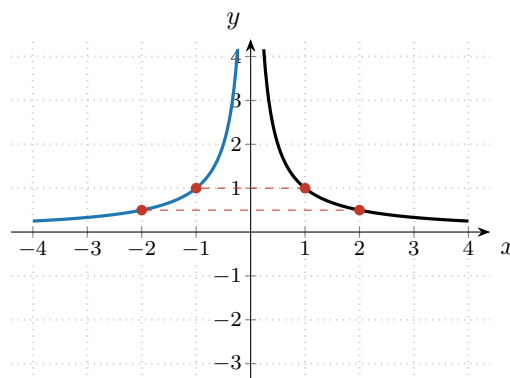
Exercice 2

2 points

a. Une fonction impaire a une courbe **symétrique par rapport à l'origine** O : à chaque point $M(x; y)$ de la partie donnée correspond le point $M'(-x; -y)$. Par exemple, $(3; 0)$ donne $(-3; 0)$ et le point le plus bas, environ $(1,7; -4)$, donne le point le plus haut, environ $(-1,7; 4)$.



b. Une fonction paire a une courbe **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** : à chaque point $M(x; y)$ correspond le point $M'(-x; y)$. Par exemple, $(1; 1)$ donne $(-1; 1)$ et $(2; 0,5)$ donne $(-2; 0,5)$.



En noir : la partie donnée; en bleu : la partie complétée par symétrie.

Exercice 3

3 points

Pour étudier la parité, on vérifie d'abord que l'ensemble de définition est **symétrique par rapport à 0**, puis on compare $f(-x)$ à $f(x)$.

1) $D = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. Pour tout réel x :

$$f(-x) = 5(-x)^2 + 4 = 5x^2 + 4 = f(x).$$

f est paire

2) $D = \mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0 (si $x \neq 0$, alors $-x \neq 0$). Pour tout réel $x \neq 0$:

$$f(-x) = \frac{1}{2(-x)} + (-x) = -\frac{1}{2x} - x = -\left(\frac{1}{2x} + x\right) = -f(x).$$

f est impaire

3) $D = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. On calcule $f(1) = 4 \times 1^3 - 1 = 3$ et $f(-1) = 4 \times (-1)^3 - 1 = -5$.

- $f(-1) \neq f(1)$, donc f n'est pas paire;
- $f(-1) = -5 \neq -f(1) = -3$, donc f n'est pas impaire.

f n'est ni paire ni impaire

(En effet $f(-x) = -4x^3 - 1$, qui n'est égal ni à $f(x) = 4x^3 - 1$ ni à $-f(x) = -4x^3 + 1$ pour $x \neq 0$.)

Exercice 4

4 points

- 1) On veut voir la courbe pour $x \in [-2; 4]$, donc $X_{\min} = -2$ et $X_{\max} = 4$. Pour les ordonnées, on calcule quelques valeurs (voir le tableau) : $f(-2) = -14$ et $f(4) = 28$ sont la plus petite et la plus grande valeur du tableau, et la courbe reste entre elles. Une fenêtre qui convient :

$$X_{\min} = -2 \quad X_{\max} = 4 \quad Y_{\min} = -15 \quad Y_{\max} = 30$$

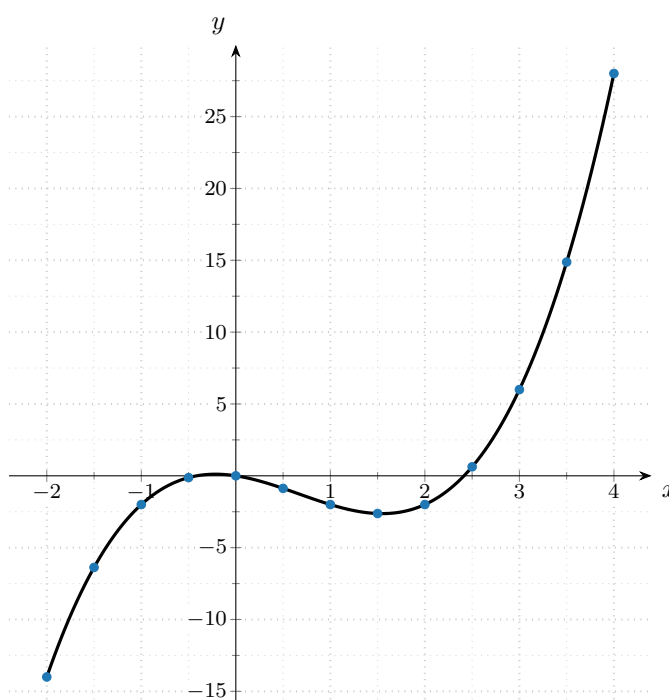
(toute fenêtre contenant $[-2; 4]$ en abscisses et $[-14; 28]$ en ordonnées convient).

- 2) Avec la calculatrice (menu « table » ou calcul direct), par exemple $f(-1,5) = (-1,5)^3 - 2 \times (-1,5)^2 - (-1,5) = -3,375 - 4,5 + 1,5 = -6,375 \approx -6,4$:

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	-14	-6,4	-2	-0,1	0	-0,9	-2	-2,6	-2	0,6	6	14,9	28

Valeurs exactes non entières : $f(-1,5) = -6,375$; $f(-0,5) = -0,125$; $f(0,5) = -0,875$; $f(1,5) = -2,625$; $f(2,5) = 0,625$; $f(3,5) = 14,875$.

- 3) On place les points du tableau puis on les relie par une courbe lisse (sans segments). Avec 1 cm pour 1 unité en abscisses et 1 cm pour 4 unités en ordonnées, la courbe mesure 6 cm de large et 10,5 cm de haut (de -14 à 28). Ci-dessous, la courbe (figure réduite) :



Exercice 5

3 points

1) Après avoir exécuté le programme (pour définir la fonction), on saisit dans la console :

$$f(3)$$

La console affiche alors 2.0, car $\sqrt{3 + \frac{3}{3}} = \sqrt{4} = 2$.

2) Avec $x = 5$:

- ligne 3 : $b = \frac{5}{3} \approx 1,667$;
- ligne 4 : $c = 3 + \frac{5}{3} = \frac{14}{3} \approx 4,667$;
- ligne 5 : $d = \sqrt{\frac{14}{3}} \approx 2,160$;
- ligne 6 : la fonction renvoie d .

$$f(5) = \sqrt{\frac{14}{3}} \approx 2,160$$

(Python affiche 2.160246899469287.)

3) On enchaîne les étapes : on divise x par 3, on ajoute 3, puis on prend la racine carrée.

$$f(x) = \sqrt{3 + \frac{x}{3}}$$

Cette fonction n'est définie que si $3 + \frac{x}{3} \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -9$.