

Exercice 1

2 points

- 1) On utilise l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 5x$ et $b = 2$:

$$A = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 2 + 2^2 = \boxed{25x^2 + 20x + 4}.$$

- 2) Le facteur $(x + 1)$ est commun aux deux termes :

$$B = (x + 1)(3x - 1) - x(x + 1) = (x + 1)[(3x - 1) - x] = \boxed{(x + 1)(2x - 1)}.$$

Vérification : en développant, $(x + 1)(2x - 1) = 2x^2 - x + 2x - 1 = 2x^2 + x - 1$, et $(x + 1)(3x - 1) - x(x + 1) = 3x^2 - x + 3x - 1 - x^2 - x = 2x^2 + x - 1$.

Exercice 2

7 points

- 1) Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse :

$$\frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{28} \quad \text{donc} \quad \frac{8}{7} - \frac{15}{28} = \frac{32}{28} - \frac{15}{28} = \frac{17}{28}.$$

Or $\frac{2}{7} = \frac{8}{28} \neq \frac{17}{28}$. L'affirmation est fausse.

- 2) On décompose chaque facteur en puissances de 2 et de 5 : $10^5 = 2^5 \times 5^5$ et $25 = 5^2$. Donc

$$10^5 \times 5^2 \times 25 \times 2^{-5} = 2^5 \times 5^5 \times 5^2 \times 5^2 \times 2^{-5} = 2^{5-5} \times 5^{5+2+2} = 5^9.$$

Le nombre s'écrit 5^9 , et non 5^7 . L'affirmation est fausse.

- 3) Avec $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$(1 + \sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}.$$

Comme $2\sqrt{3} \neq 0$, on a $(1 + \sqrt{3})^2 \neq 4$. L'affirmation est vraie.

- 4) On fait apparaître $\sqrt{2}$: $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$, $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$.
Donc

$$\sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{50} = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \neq 0.$$

L'affirmation est fausse.

- 5) On reconnaît $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a = 2x + 1$ et $b = x - 2$:

$$C = [(2x + 1) - (x - 2)][(2x + 1) + (x - 2)] = (2x + 1 - x + 2)(3x - 1) = (x + 3)(3x - 1).$$

Vérification : les deux formes développées valent $3x^2 + 8x - 3$. L'affirmation est vraie.

- 6) La réciproque est : « Si un nombre entier est un multiple de 5, alors son chiffre des unités est 0. »

Elle est fausse : 5 (ou 15, 25...) est un multiple de 5 dont le chiffre des unités est 5, et non 0.

L'affirmation est fausse (contre-exemple : 5).

7) Rappel justifié : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Plaçons l'angle aigu de mesure x dans un triangle MNP rectangle en N : c'est l'angle $\widehat{NMP}$. Alors

$$\cos x = \frac{MN}{MP} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{NP}{MP},$$

donc

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{MN^2}{MP^2} + \frac{NP^2}{MP^2} = \frac{MN^2 + NP^2}{MP^2} = \frac{MP^2}{MP^2} = 1,$$

car $MN^2 + NP^2 = MP^2$ d'après le théorème de Pythagore dans le triangle MNP rectangle en N .

Application : si $\cos^2 x = \frac{1}{4}$, alors $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. L'affirmation est vraie.

Exercice 3

3 points

1) Le triangle ABC est rectangle en A , donc son hypoténuse est $[BC]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \text{donc} \quad AC^2 = BC^2 - AB^2 = (x+7)^2 - 5^2.$$

En développant avec $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$AC^2 = x^2 + 14x + 49 - 25 = \boxed{x^2 + 14x + 24}.$$

2) Pour $x = 6$:

- $BC = 6 + 7 = 13$;
- $AB = 5$;
- $AC^2 = 6^2 + 14 \times 6 + 24 = 36 + 84 + 24 = 144$, et $AC > 0$, donc $AC = \sqrt{144} = 12$.

$$AB = 5, \quad AC = 12, \quad BC = 13.$$

Vérification : $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$.

Exercice 4

4 points

- 1) On fait apparaître $\sqrt{3}$: $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$ et $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$. Donc

$$5\sqrt{12} - \sqrt{75} = 5 \times 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = \boxed{5\sqrt{3}}.$$

- 2) Le quadrilatère $ABCD$ a quatre angles droits : c'est un rectangle. De plus, d'après la question 1), $AB = 5\sqrt{3}$ et $AD = 5\sqrt{3}$: deux côtés consécutifs ont la même longueur. Un rectangle ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un carré.

$$\boxed{ABCD \text{ est un carré de côté } 5\sqrt{3} \text{ cm.}}$$

- 3) Le périmètre d'un carré de côté c vaut $4c$:

$$P = 4 \times 5\sqrt{3} = \boxed{20\sqrt{3} \text{ cm}} \approx 34,641 \text{ cm},$$

soit, arrondi au mm (au dixième de cm) : $\boxed{P \approx 34,6 \text{ cm}}$.

- 4) L'aire d'un carré de côté c vaut c^2 :

$$A = (5\sqrt{3})^2 = 5^2 \times (\sqrt{3})^2 = 25 \times 3 = \boxed{75 \text{ cm}^2}.$$

Exercice 5

4 points

- 1) Le triangle ABC est isocèle en C : la hauteur $[CK]$ est aussi médiane, donc K est le milieu de $[AB]$ et $KB = 5 \text{ m}$ (ce que confirme le croquis).

Dans le triangle JHB rectangle en H , on connaît l'angle $\widehat{JBH} = 30^\circ$ et le côté opposé $JH = 1,8 \text{ m}$; on cherche le côté adjacent HB :

$$\tan \widehat{JBH} = \frac{JH}{HB} \quad \text{donc} \quad HB = \frac{JH}{\tan 30^\circ} = \frac{1,8}{\tan 30^\circ} \approx 3,118 \text{ m}.$$

Le point H est sur $[KB]$, donc

$$KH = KB - HB \approx 5 - 3,118 \approx 1,882 \text{ m}, \quad \text{soit} \quad \boxed{KH \approx 1,9 \text{ m}} \text{ au dixième.}$$

Remarque : on peut aussi utiliser le théorème de Thalès dans le triangle CKB (les droites (JH) et (CK) sont parallèles, toutes deux perpendiculaires à (AB)) avec la hauteur $CK = 2,9 \text{ m}$ du croquis : $\frac{HB}{KB} = \frac{JH}{CK}$, d'où $HB = 5 \times \frac{1,8}{2,9} \approx 3,103 \text{ m}$ et $KH \approx 1,897 \text{ m}$: on retrouve $KH \approx 1,9 \text{ m}$.

- 2) D'après la question 1), on a l'encadrement au dixième $1,8 \leq KH \leq 1,9$ (en m).

Par symétrie (le triangle ABC est isocèle en C et (CK) est son axe de symétrie), la hauteur sous plafond atteint $1,80 \text{ m}$ à la même distance KH de part et d'autre de K . La zone habitable est donc un rectangle de largeur $2KH$ et de longueur 8 m (la longueur des combles); sa surface est

$$S = 2KH \times 8 = 16KH.$$

En multipliant l'encadrement de KH par $16 > 0$:

$$16 \times 1,8 \leq \mathcal{S} \leq 16 \times 1,9 \quad \text{soit} \quad \boxed{28,8 \text{ m}^2 \leq \mathcal{S} \leq 30,4 \text{ m}^2}.$$

Remarque : avec la valeur plus précise $KH \approx 1,882 \text{ m}$, on obtient $\mathcal{S} \approx 30,1 \text{ m}^2$, qui est bien dans l'encadrement.