

Exercice 1

3 points

1) On fait apparaître le facteur 5 sous chaque radical : $180 = 36 \times 5$, $80 = 16 \times 5$ et $125 = 25 \times 5$.

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{36 \times 5} + 5\sqrt{16 \times 5} - 3\sqrt{25 \times 5} \\ &= 2 \times 6\sqrt{5} + 5 \times 4\sqrt{5} - 3 \times 5\sqrt{5} \\ &= 12\sqrt{5} + 20\sqrt{5} - 15\sqrt{5} \end{aligned} \quad \boxed{A = 17\sqrt{5}}$$

2) Le plus grand carré parfait qui divise 48 est 16 : $48 = 16 \times 3$. Donc

$$B = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} \quad \boxed{B = 4\sqrt{3}}$$

($b = 3$ ne contient plus aucun facteur carré, c'est le plus petit possible.)

3) Pour des nombres positifs, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$:

$$C = \sqrt{50 \times 8} = \sqrt{400} \quad \boxed{C = 20}$$

On reconnaît l'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ avec $a = 5$ et $b = 2\sqrt{3}$:

$$D = 5^2 - (2\sqrt{3})^2 = 25 - 4 \times 3 = 25 - 12 \quad \boxed{D = 13}$$

4) On multiplie le numérateur et le dénominateur de E par $\sqrt{5}$:

$$E = \frac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} \quad \boxed{E = \frac{3\sqrt{5}}{5}}$$

Pour F , on multiplie par la quantité conjuguée $4 + \sqrt{3}$:

$$F = \frac{2(4 + \sqrt{3})}{(4 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})} = \frac{8 + 2\sqrt{3}}{4^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{8 + 2\sqrt{3}}{16 - 3} \quad \boxed{F = \frac{8 + 2\sqrt{3}}{13}}$$

Exercice 2

4 points

1) On développe chaque membre, puis on isole x :

$$4 - 3(1 - 2x) \geq 2(x + 5) - x \iff 4 - 3 + 6x \geq 2x + 10 - x$$

$$\iff 6x + 1 \geq x + 10$$

$$\iff 5x \geq 9$$

(on retranche x et 1)

$$\iff x \geq \frac{9}{5}$$

(on divise par $5 > 0$)

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{9}{5}; +\infty \right]}$$

2) On cherche où chaque facteur s'annule :

- $6 - 3x = 0 \iff x = 2$; le coefficient de x est négatif, donc $6 - 3x$ est positif avant 2 et négatif après;
- $2x + 5 = 0 \iff x = -\frac{5}{2}$; le coefficient de x est positif, donc $2x + 5$ est négatif avant $-\frac{5}{2}$ et positif après.

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	2	$+\infty$
$6 - 3x$	$+$	$+$	0	$-$
$2x + 5$	$-$	0	$+$	$+$
$(6 - 3x)(2x + 5)$	$-$	0	$+$	0

Le produit est **strictement** négatif : les valeurs $-\frac{5}{2}$ et 2 sont exclues.

$$\mathcal{S} =]-\infty; -\frac{5}{2}[\cup]2; +\infty[$$

3) On multiplie les deux membres par 6 (dénominateur commun, $6 > 0$: le sens ne change pas) :

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{x+1}{3} &\geq \frac{5-x}{6} \iff 3x - 2(x+1) \geq 5-x \\ &\iff x - 2 \geq 5-x \\ &\iff 2x \geq 7 && \text{(on ajoute } x \text{ et 2)} \\ &\iff x \geq \frac{7}{2} && \text{(on divise par } 2 > 0) \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left[\frac{7}{2}; +\infty \right[$$

4) Valeur interdite : $2x + 6 = 0 \iff x = -3$.

Le numérateur s'annule pour $1 - 4x = 0 \iff x = \frac{1}{4}$.

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$1 - 4x$	+	+	0	-
$2x + 6$	-	0	+	+
$\frac{1 - 4x}{2x + 6}$	-	+	0	-

Le quotient est positif ou nul sur $]-3; \frac{1}{4}]$: on garde $\frac{1}{4}$ (le quotient y vaut 0) mais pas -3 (valeur interdite).

$$\mathcal{S} = \left] -3; \frac{1}{4} \right]$$

Exercice 3

4 points

- 1) f est affine : il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x , $f(x) = ax + b$. Le coefficient directeur vaut

$$a = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{-7 - 1}{4} = \frac{-8}{4} = -2.$$

Ensuite $f(1) = 1 \iff -2 \times 1 + b = 1 \iff b = 3$. Donc, pour tout réel x ,

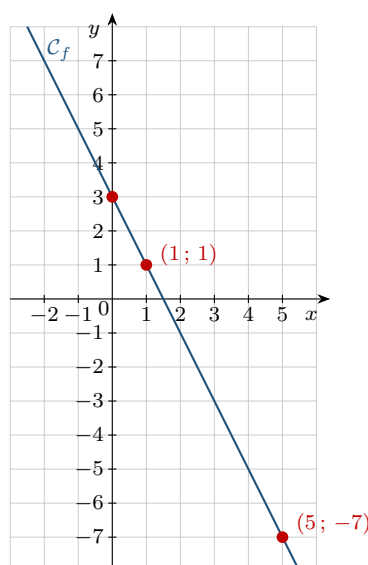
$$f(x) = -2x + 3$$

Vérification : $f(5) = -10 + 3 = -7$.

- 2) Le coefficient directeur $a = -2$ est **strictement négatif** : la fonction affine f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f		

- 3) La courbe de f est la droite d'ordonnée à l'origine 3 et de coefficient directeur -2 . Elle passe par les points $(1; 1)$ et $(5; -7)$ (et par $(0; 3)$) :



- 4) $f(x) = 0 \iff -2x + 3 = 0 \iff x = \frac{3}{2}$. Comme f est décroissante, $f(x)$ est positif avant $\frac{3}{2}$ et négatif après :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

$$f(x) > 0 \text{ sur }]-\infty; \frac{3}{2}[, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = 0, \quad f(x) < 0 \text{ sur }]\frac{3}{2}; +\infty[$$

5) On remarque que $-2\sqrt{2} + 3 = f(\sqrt{2})$ et $-2\sqrt{5} + 3 = f(\sqrt{5})$.

Comme $2 < 5$ et que la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, on a $\sqrt{2} < \sqrt{5}$.

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$: elle **inverse** l'ordre. Donc $f(\sqrt{2}) > f(\sqrt{5})$, c'est-à-dire

$$-2\sqrt{2} + 3 > -2\sqrt{5} + 3$$

Exercice 4

3 points

	Affirmation	Réponse	Lecture du tableau
1	$A(-4) = 0$	Vrai	Un 0 figure sous -4 .
2	$A(x)$ n'est pas définie pour $x = 2$	Vrai	La double barre sous 2 indique une valeur interdite.
3	$A(-4,5)$ est négatif	Faux	$-4,5 < -4$: $A(x)$ est positif sur $] -\infty; -4[$.
4	$A(0) < 0$	Vrai	$0 \in]-4; 2[$, où $A(x)$ est négatif.
5	Si $x > 5$, alors $A(x) \geq 0$	Vrai	$A(x) > 0$ sur $]5; +\infty[$, donc $A(x) \geq 0$.
6	Si $A(x) > 0$, alors $x < -4$	Faux	Contre-exemple : $x = 6$ donne $A(6) > 0$ sans que $6 < -4$.

Exercice 5

3 points

1) On développe chaque terme ($(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ pour le premier) :

$$\begin{aligned} E &= (9x^2 - 30x + 25) + (21x^2 - 12x - 35x + 20) \\ &= 9x^2 - 30x + 25 + 21x^2 - 47x + 20 \end{aligned}$$

$$E = 30x^2 - 77x + 45$$

2) On factorise par le facteur commun $(3x - 5)$:

$$E = (3x - 5)[(3x - 5) + (7x - 4)] = (3x - 5)(3x - 5 + 7x - 4)$$

$$E = (3x - 5)(10x - 9)$$

Vérification : $(3x - 5)(10x - 9) = 30x^2 - 27x - 50x + 45 = 30x^2 - 77x + 45$, on retrouve la forme développée.

3) On utilise la forme développée, avec $(\sqrt{2})^2 = 2$:

$$E = 30 \times 2 - 77\sqrt{2} + 45$$

$$E = 105 - 77\sqrt{2}$$

- 4) On étudie le signe de la forme factorisée : $3x - 5 = 0 \iff x = \frac{5}{3}$ et $10x - 9 = 0 \iff x = \frac{9}{10}$, avec $\frac{9}{10} < \frac{5}{3}$. Les deux coefficients de x sont positifs.

x	$-\infty$	$\frac{9}{10}$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$	
$10x - 9$	$-$	0	$+$	$+$	
$3x - 5$	$-$	$-$	0	$+$	
E	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\mathcal{S} = \left] -\infty ; \frac{9}{10} \right[\cup \left] \frac{5}{3} ; +\infty \right[$$

Exercice 6

3 points

- 1) L'aire non utilisée est l'aire de la plaque, x^2 , diminuée de celle de la lettre H. La lettre H est formée de deux bandes verticales de 60 sur x et d'une barre horizontale de hauteur 30, dont la longueur est ce qui reste entre les deux bandes, $x - 2 \times 60 = x - 120$:

$$\text{aire du H} = 2 \times 60x + 30(x - 120) = 120x + 30x - 3600 = 150x - 3600.$$

Donc

$$A(x) = x^2 - (150x - 3600)$$

$$A(x) = x^2 - 150x + 3600$$

Autre méthode : les deux rectangles blancs ont la même largeur $x - 120$ et des hauteurs dont la somme vaut $x - 30$; d'où $A(x) = (x - 120)(x - 30) = x^2 - 30x - 120x + 3600$, même résultat.

2)

$$A(x) \leq 2200 \iff x^2 - 150x + 3600 \leq 2200$$

$$\iff x^2 - 150x + 1400 \leq 0 \quad (\text{on retranche } 2200)$$

Or $(x - 140)(x - 10) = x^2 - 10x - 140x + 1400 = x^2 - 150x + 1400$. Donc

$$A(x) \leq 2200 \iff (x - 140)(x - 10) \leq 0$$

- 3) $x - 10 = 0 \iff x = 10$ et $x - 140 = 0 \iff x = 140$; les deux coefficients de x sont positifs.

x	$-\infty$	10	140	$+\infty$	
$x - 10$	$-$	0	$+$	$+$	
$x - 140$	$-$	$-$	0	$+$	
$(x - 140)(x - 10)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$(x - 140)(x - 10) \leq 0 \iff x \in [10 ; 140]$$

- 4) Hugo doit avoir $(x - 140)(x - 10) \leq 0$, soit $10 \leq x \leq 140$. Comme de plus x est un entier avec $x \geq 130$:

$$x \in \{130; 131; 132; \dots; 139; 140\}$$

Hugo a donc 11 choix possibles. *Vérification* : $A(140) = 19\,600 - 21\,000 + 3\,600 = 2\,200$ (limite atteinte) et $A(130) = 16\,900 - 19\,500 + 3\,600 = 1\,000 \leq 2\,200$.

Exercice bonus : le petit coin du chercheur

Domaine. L'inégalité a un sens lorsque les deux dénominateurs sont non nuls : $x - 1 \neq 0$ et $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \neq 0$, soit $x \neq 1$ et $x \neq -1$. On travaille donc sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Mise au même dénominateur. On passe tout dans le membre de gauche; le dénominateur commun est $(x - 1)(x + 1)$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-1} \geq 1 + \frac{x+5}{x^2-1} &\iff \frac{3}{x-1} - 1 - \frac{x+5}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \\ &\iff \frac{3(x+1) - (x-1)(x+1) - (x+5)}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \\ &\iff \frac{3x + 3 - x^2 + 1 - x - 5}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \\ &\iff \frac{-x^2 + 2x - 1}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \\ &\iff \frac{-(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} \geq 0 && \text{(identité remarquable)} \\ &\iff \frac{-(x-1)}{x+1} \geq 0 && \text{(on simplifie par } x-1 \neq 0) \\ &\iff \frac{1-x}{x+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Tableau de signes (sans oublier que $x = 1$ est interdit) :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1 - x$	+	+	0	-
$x + 1$	-	0	+	+
$\frac{1-x}{x+1}$	-	+	0	-

Le quotient simplifié est positif ou nul sur $] -1; 1]$. Mais 1 est une valeur interdite de l'inégalité de départ : on l'exclut.

$$S =]-1; 1[$$

Vérification : pour $x = 0$, $\frac{3}{-1} = -3$ et $1 + \frac{5}{-1} = -4$: on a bien $-3 \geq -4$. Pour $x = 2$, $\frac{3}{1} = 3$ et $1 + \frac{7}{3} = \frac{10}{3}$: $3 < \frac{10}{3}$, donc 2 n'est pas solution.