

Exercice 1

3 points

- 1) 43 adhérents représentent 2,5 % du total N : $N \times 0,025 = 43$, donc $N = \frac{43}{0,025} = 1\,720$.

Réponse C

- 2) $\frac{90}{300} = 0,3 = 30\%$.

Réponse A

- 3) $1\,800 \times 0,30 = 540$ hommes.

Réponse A

- 4) Coefficient multiplicateur : $\frac{31,50}{30} = 1,05 = 1 + \frac{5}{100}$: hausse de 5 %.

Réponse B

- 5) $0,88 = 1 - 0,12 = 1 - \frac{12}{100}$: la quantité a diminué de 12 %.

Réponse C

- 6) Une baisse de 32 % correspond au coefficient $1 - 0,32 = 0,68$.

Réponse B

- 7) $500 \times (1 - 0,20) = 500 \times 0,8 = 400$ €.

Réponse B

- 8) On prend 60 % de 30 % : $0,30 \times 0,60 = 0,18 = 18\%$.

Réponse A

- 9) Coefficient global : $0,85 \times 0,90 = 0,765 = 1 - 0,235$: diminution de 23,5 % (et non de 25 % : les pourcentages ne s'ajoutent pas).

Réponse C

- 10) Le coefficient réciproque de 1,45 est $\frac{1}{1,45} \approx 0,6897$, et $1 - 0,6897 = 0,3103$: il faut une baisse d'environ 31 %.

Réponse A

Exercice 2

2,5 points

- 1) a. Le paquet de 500 g contient :

- $500 \times 0,70 = 350$ g d'arabica, soit 0,35 kg, qui coûtent $0,35 \times 18 = 6,30$ €;
- $500 \times 0,30 = 150$ g de robusta, soit 0,15 kg, qui coûtent $0,15 \times 9 = 1,35$ €.

Prix de revient : $6,30 + 1,35 = 7,65$, donc

le prix de revient du paquet est de 7,65 €.

- b. Un bénéfice de 20 % correspond au coefficient multiplicateur 1,20 :

$$7,65 \times 1,20 = 9,18, \quad \text{le prix de vente doit être de 9,18 €}.$$

- 2) a. Nouveaux prix au kilogramme :

- arabica : $18 \times 1,25 = 22,50$ €; coût de l'arabica du paquet : $0,35 \times 22,50 = 7,875$ €;
- robusta : $9 \times (1 - 0,10) = 9 \times 0,90 = 8,10$ €; coût du robusta du paquet : $0,15 \times 8,10 = 1,215$ €.

Nouveau prix de revient : $7,875 + 1,215 = 9,09$, donc

le nouveau prix de revient est de 9,09 €.

b. Le taux d'évolution est

$$t = \frac{9,09 - 7,65}{7,65} = \frac{1,44}{7,65} \approx 0,188\,235,$$

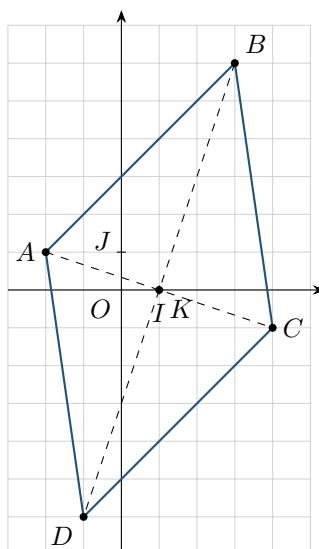
soit

$t \approx +18,82\%$

Remarque : la hausse de l'arabica (+25 %) l'emporte largement sur la baisse du robusta (−10 %), car l'arabica représente l'essentiel du coût (6,30 € sur 7,65 €).

Exercice 3

3 points



1) Voir la figure ci-dessus (complétée avec K et D).

2) Le repère est orthonormé, on peut donc calculer les longueurs :

$$AB^2 = (3 - (-2))^2 + (6 - 1)^2 = 25 + 25 = 50, \quad AB = \sqrt{50} = 5\sqrt{2};$$

$$BC^2 = (4 - 3)^2 + (-1 - 6)^2 = 1 + 49 = 50, \quad BC = \sqrt{50} = 5\sqrt{2};$$

$$AC^2 = (4 - (-2))^2 + (-1 - 1)^2 = 36 + 4 = 40, \quad AC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

$AB = BC$ (et $AC \neq AB$), donc

le triangle ABC est isocèle en B .

3) $x_K = \frac{-2 + 4}{2} = 1$ et $y_K = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$, donc $K(1; 0)$.

- 4) D est le symétrique de B par rapport à K , donc K est le milieu de $[BD]$:

$$\begin{aligned}x_K &= \frac{x_B + x_D}{2} \iff 1 = \frac{3 + x_D}{2} \iff 2 = 3 + x_D \iff x_D = -1; \\y_K &= \frac{y_B + y_D}{2} \iff 0 = \frac{6 + y_D}{2} \iff 0 = 6 + y_D \iff y_D = -6.\end{aligned}$$

Donc $D(-1; -6)$.

Autre méthode (vecteurs) : $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{BK}$, avec $\overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} 1-3 \\ 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$, d'où $D(1-2; 0-6) = (-1; -6)$.

- 5) Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu K : $ABCD$ est un parallélogramme.

(On peut aussi le vérifier avec les vecteurs : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 4-(-1) \\ -1-(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.)

De plus, deux côtés consécutifs sont de même longueur : $AB = BC = 5\sqrt{2}$. Un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux est un losange :

$ABCD$ est un losange.

Ce n'est pas un carré : ses diagonales n'ont pas la même longueur, car $AC^2 = 40$ alors que $BD^2 = (-1-3)^2 + (-6-6)^2 = 16 + 144 = 160$.

Exercice 4

3 points

- 1) Les diagonales sont perpendiculaires : le triangle DEC est rectangle en E . D'après le théorème de Pythagore :

$$DC^2 = DE^2 + EC^2 = 3^2 + (3\sqrt{2})^2 = 9 + 18 = 27,$$

donc $DC = \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3}$ et

$$DC = 3\sqrt{3} \text{ cm}.$$

- 2) Dans les triangles rectangles en E , toujours avec le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = EA^2 + EB^2 = 2 + 1 = 3 \quad \text{et} \quad AD^2 = EA^2 + ED^2 = 2 + 9 = 11.$$

Donc $AB = \sqrt{3}$ et $AD = \sqrt{11}$: $AB \neq AD$. Un losange a ses quatre côtés de même longueur, donc

$ABCD$ n'est pas un losange.

Autre justification : les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu ; or $EA = \sqrt{2} \neq EC = 3\sqrt{2}$, donc E n'est pas le milieu de $[AC]$.

- 3) Les points A, E, C d'une part et B, E, D d'autre part sont alignés, dans le même ordre (E entre

A et C , et entre B et D). On compare :

$$\frac{EA}{EC} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \frac{EB}{ED} = \frac{1}{3}.$$

Les rapports sont égaux, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès,

$$(AB) \parallel (DC).$$

- 4) Si les droites (AD) et (BC) étaient parallèles, le théorème de Thalès (dans la configuration « papillon » de sommet E) donnerait $\frac{EA}{EC} = \frac{ED}{EB}$. Or

$$\frac{EA}{EC} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \frac{ED}{EB} = \frac{3}{1} = 3.$$

Ces rapports sont différents, donc

$$(AD) \text{ et } (BC) \text{ ne sont pas parallèles.}$$

- 5) $ABCD$ a deux côtés opposés parallèles, (AB) et (DC) , et deux côtés opposés non parallèles, (AD) et (BC) :

$$ABCD \text{ est un trapèze de bases } [AB] \text{ et } [DC]$$

(il n'est pas un parallélogramme; ses diagonales sont de plus perpendiculaires).

Exercice 5

3 points

- 1) Le coefficient directeur de (AB) est

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4 - 4}{3 - (-1)} = \frac{-8}{4} = -2.$$

L'équation réduite est de la forme $y = -2x + p$. Comme $A(-1; 4)$ est sur la droite : $4 = -2 \times (-1) + p \iff 4 = 2 + p \iff p = 2$.

$$(AB) : y = -2x + 2.$$

Vérification avec B : $-2 \times 3 + 2 = -4 = y_B$.

- 2) On remplace x par $\frac{5}{2}$: $-2 \times \frac{5}{2} + 2 = -5 + 2 = -3 = y_E$. Les coordonnées de E vérifient l'équation, donc

$$E \in (AB) : \text{le lampadaire est sur la droite } (AB).$$

- 3) Deux droites parallèles (non verticales) ont le même coefficient directeur : d a une équation de la forme $y = -2x + p'$. Comme $C(1; 5) \in d$: $5 = -2 \times 1 + p' \iff p' = 7$.

$$d : y = -2x + 7.$$

- 4) a. Une droite d'équation $ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Pour $d' : x - y - 1 = 0$

$$(a = 1, b = -1) : \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Pour } (AB) : \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ -4 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ (ou } \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ en divisant par 4).}$$

Déterminant : $\det(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = 1 \times (-8) - 1 \times 4 = -12 \neq 0$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles :

d' et (AB) sont sécantes.

- b. Les coordonnées de K vérifient les deux équations :

$$\begin{cases} y = -2x + 2 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x + 2 \\ x - (-2x + 2) - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -2x + 2 \\ 3x - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc $K(1; 0)$. Vérification : $-2 \times 1 + 2 = 0$ et $1 - 0 - 1 = 0$.

- 5) $C(1; 5)$ et $K(1; 0)$ ont la même abscisse 1 : la droite (CK) est parallèle à l'axe des ordonnées (verticale), et tous ses points ont pour abscisse 1 :

$$(CK) : x = 1.$$

Une droite verticale n'a pas de coefficient directeur (on ne peut pas calculer $\frac{y_K - y_C}{x_K - x_C}$, car $x_K - x_C = 0$) : elle n'a donc pas d'équation de la forme $y = mx + p$.

Exercice 6

4 points

- 1) Le milieu M de $[AB]$ a pour coordonnées $x_M = \frac{2+6}{2} = 4$ et $y_M = \frac{4+(-1)}{2} = \frac{3}{2}$.

On remplace x par 4 dans l'équation de (d) : $-\frac{1}{2} \times 4 + \frac{7}{2} = -2 + \frac{7}{2} = \frac{3}{2} = y_M$.

Les coordonnées de $M \left(4; \frac{3}{2} \right)$ vérifient l'équation, donc

$$(d) \text{ passe par le milieu de } [AB].$$

- 2) a. La médiatrice de $[CD]$ est l'ensemble des points équidistants de C et de D . Le repère est orthonormé :

$$EC^2 = (3-2)^2 + \left(2+\frac{5}{2}\right)^2 = 1 + \frac{81}{4} = \frac{85}{4}, \quad ED^2 = (-1-2)^2 + \left(1+\frac{5}{2}\right)^2 = 9 + \frac{49}{4} = \frac{85}{4};$$

$$FC^2 = (3-0)^2 + \left(2-\frac{11}{2}\right)^2 = 9 + \frac{49}{4} = \frac{85}{4}, \quad FD^2 = (-1-0)^2 + \left(1-\frac{11}{2}\right)^2 = 1 + \frac{81}{4} = \frac{85}{4}.$$

Ainsi $EC = ED$ et $FC = FD$: les points E et F , distincts, appartiennent tous deux à la médiatrice de $[CD]$. Une droite étant déterminée par deux points distincts,

$$(EF) \text{ est la médiatrice de } [CD].$$

- b. Coefficient directeur : $m = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{\frac{11}{2} - (-\frac{5}{2})}{0 - 2} = \frac{8}{-2} = -4$.

F est sur l'axe des ordonnées, donc l'ordonnée à l'origine est $p = \frac{11}{2}$:

$$(EF) : y = -4x + \frac{11}{2}.$$

Vérification : pour $x = 2$, $-8 + \frac{11}{2} = -\frac{5}{2} = y_E$; et le milieu de $[CD]$, $\left(1; \frac{3}{2}\right)$, vérifie bien $-4 + \frac{11}{2} = \frac{3}{2}$.

- 3) a. On développe le produit, puis on multiplie par 2 :

$$2(x-3)(2x-11) = 2(2x^2 - 11x - 6x + 33) = 2(2x^2 - 17x + 33),$$

$$2(x-3)(2x-11) = 4x^2 - 34x + 66.$$

- b. Un point K de (Δ) a des coordonnées de la forme $K(x; x-2)$. Le repère est orthonormé :

$$GK^2 = (x-3)^2 + (x-2-3)^2 = (x-3)^2 + (x-5)^2 = 2x^2 - 16x + 34,$$

$$HK^2 = (x-6)^2 + (x-2-1)^2 = (x-6)^2 + (x-3)^2 = 2x^2 - 18x + 45,$$

$$GH^2 = (6-3)^2 + (1-3)^2 = 9 + 4 = 13.$$

D'après le théorème de Pythagore et sa réciproque, le triangle GHK est rectangle en K si

et seulement si $GK^2 + HK^2 = GH^2$:

$$\begin{aligned} GK^2 + HK^2 = GH^2 &\iff 4x^2 - 34x + 79 = 13 \\ &\iff 4x^2 - 34x + 66 = 0 \\ &\iff 2(x-3)(2x-11) = 0 \quad (\text{question a.}) \\ &\iff x = 3 \quad \text{ou} \quad x = \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

Pour $x = 3$: $y = 3 - 2 = 1$; pour $x = \frac{11}{2}$: $y = \frac{11}{2} - 2 = \frac{7}{2}$. Il y a donc deux points :

$$K_1(3; 1) \quad \text{et} \quad K_2\left(\frac{11}{2}; \frac{7}{2}\right).$$

Vérification : pour K_1 , $GK_1^2 + HK_1^2 = 4 + 9 = 13$; pour K_2 , $GK_2^2 + HK_2^2 = \frac{13}{2} + \frac{13}{2} = 13$.
(Ni G ni H n'est sur (Δ) , les deux triangles ne sont donc pas aplatis.)

Exercice 7

1,5 point

- 1) Soit $V > 0$ la valeur de départ. Une hausse de $x\%$ correspond au coefficient $1 + \frac{x}{100}$, une baisse de $x\%$ au coefficient $1 - \frac{x}{100}$. Après les deux évolutions, la valeur devient

$$\begin{aligned} V \times \left(1 + \frac{x}{100}\right) \left(1 - \frac{x}{100}\right) &= V \times \left(1 - \left(\frac{x}{100}\right)^2\right) \quad (\text{identité } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2) \\ &= V \times \left(1 - \frac{x^2}{10\,000}\right) \\ &= V \times \left(1 - \frac{\frac{x^2}{100}}{100}\right). \end{aligned}$$

Le coefficient global est $1 - \frac{x^2/100}{100}$, qui ne dépend pas de V :

$$\text{c'est une baisse de } \frac{x^2}{100} \%.$$

Exemple : une hausse de 10% suivie d'une baisse de 10% : $1,1 \times 0,9 = 0,99$, soit une baisse de $1\% = \frac{10^2}{100} \%$.

- 2) Dans le cas contraire (baisse de $x\%$, puis hausse de $x\%$), le coefficient global vaut $\left(1 - \frac{x}{100}\right) \left(1 + \frac{x}{100}\right)$: c'est le même produit, car la multiplication est commutative.

$$\text{On obtient la même chose : une baisse de } \frac{x^2}{100} \%.$$

L'ordre des deux évolutions n'a donc aucune importance.