

Exercice 1

4 points

- 1) Soient $a \geq 0$ et $b > 0$. Les racines $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ existent, $\sqrt{a} \geq 0$ et $\sqrt{b} > 0$; le quotient $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ existe donc et il est **positif**.

Calculons son carré :

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Ainsi $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est un nombre positif dont le carré vaut $\frac{a}{b}$. Or, par définition, $\sqrt{\frac{a}{b}}$ est l'**unique** nombre positif dont le carré vaut $\frac{a}{b}$ (qui est bien positif). Donc

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}.$$

- 2) a. Si a et b sont des multiples de 5, il existe deux entiers relatifs k et k' tels que $a = 5k$ et $b = 5k'$. Alors

$$a + b = 5k + 5k' = 5(k + k').$$

Comme $k + k'$ est un entier relatif (somme de deux entiers), $\boxed{a + b \text{ est un multiple de } 5}$.

- b. Propriété réciproque : « Si $a + b$ est un multiple de 5, alors a et b sont des multiples de 5. »

- c. Cette réciproque est **fausse**. Un contre-exemple suffit : avec $a = 2$ et $b = 3$, la somme $a + b = 5$ est un multiple de 5, mais ni 2 ni 3 n'est un multiple de 5.

La réciproque est fausse (contre-exemple : $a = 2$, $b = 3$).

Exercice 2

9 points

- 1) Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse ($b \neq 0$) :

$$\frac{\frac{2a}{5}}{\frac{3}{4b}} = \frac{2a}{5} \times \frac{4b}{3} = \boxed{\frac{8ab}{15}}.$$

- 2) On utilise $\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$:

$$\frac{10^p}{10^{q-p}} = 10^{p-(q-p)} = 10^{p-q+p} = \boxed{10^{2p-q}}.$$

Vérification : pour $p = 3$ et $q = 5$, $\frac{10^3}{10^2} = 10 = 10^{2 \times 3 - 5}$.

3) On passe tout dans le membre de gauche et on factorise par $(5x + 3)$:

$$\begin{aligned}(3x - \frac{1}{4})(5x + 3) &= (5x + 3)(\frac{3}{2} - 5x) \iff (5x + 3)(3x - \frac{1}{4}) - (5x + 3)(\frac{3}{2} - 5x) = 0 \\ &\iff (5x + 3)[3x - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 5x] = 0 \\ &\iff (5x + 3)(8x - \frac{7}{4}) = 0.\end{aligned}$$

Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul :

$$5x + 3 = 0 \iff x = -\frac{3}{5} \quad \text{ou} \quad 8x - \frac{7}{4} = 0 \iff 8x = \frac{7}{4} \iff x = \frac{7}{32}.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{3}{5}; \frac{7}{32} \right\}$$

Vérification : pour $x = \frac{7}{32}$, $3x - \frac{1}{4} = \frac{21}{32} - \frac{8}{32} = \frac{13}{32}$ et $\frac{3}{2} - 5x = \frac{48}{32} - \frac{35}{32} = \frac{13}{32}$: les deux membres sont égaux. Pour $x = -\frac{3}{5}$, les deux membres valent 0.

4) Valeur interdite : $2 - 3x = 0 \iff x = \frac{2}{3}$. On résout donc sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$:

$$\begin{aligned}\frac{5x - 3}{2 - 3x} &= -1 \iff 5x - 3 = -(2 - 3x) \quad (\text{on multiplie par } 2 - 3x \neq 0) \\ &\iff 5x - 3 = -2 + 3x \\ &\iff 2x = 1 \\ &\iff x = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{3}$: la valeur est acceptée.

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{Vérification : } \frac{5 \times \frac{1}{2} - 3}{2 - 3 \times \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1.$$

5) On isole x dans le membre de gauche :

$$\begin{aligned}2x - 7 &> 5x - \frac{1}{2} \iff 2x - 5x > -\frac{1}{2} + 7 \quad (\text{on retranche } 5x \text{ et on ajoute } 7) \\ &\iff -3x > \frac{13}{2} \\ &\iff x < -\frac{13}{6} \quad (\text{on divise par } -3 < 0 : \text{l'ordre change})\end{aligned}$$

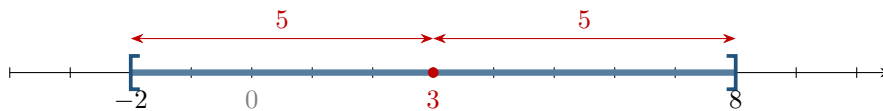
$$\mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{13}{6} \right[$$

6) $|x - 3|$ est la distance entre x et 3 ; l'inégalité dit que cette distance est inférieure ou égale à 5.

$$\begin{aligned}|x - 3| \leq 5 &\iff -5 \leq x - 3 \leq 5 \\ &\iff -2 \leq x \leq 8 \quad (\text{on ajoute } 3)\end{aligned}$$

$$x \in [-2; 8]$$

Graphiquement : les réels cherchés sont ceux situés à une distance au plus 5 de 3, c'est-à-dire entre $3 - 5 = -2$ et $3 + 5 = 8$, bornes comprises (crochets fermés).



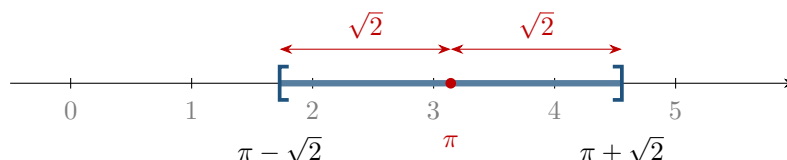
7) De même, $|x - \pi|$ est la distance entre x et π :

$$|x - \pi| \leq \sqrt{2} \iff -\sqrt{2} \leq x - \pi \leq \sqrt{2} \iff \pi - \sqrt{2} \leq x \leq \pi + \sqrt{2}.$$

$$x \in [\pi - \sqrt{2}; \pi + \sqrt{2}]$$

Pour placer les bornes : $\pi \approx 3,14$ et $\sqrt{2} \approx 1,41$, donc $\pi - \sqrt{2} \approx 1,73$ et $\pi + \sqrt{2} \approx 4,56$.

Graphiquement : les réels situés à une distance au plus $\sqrt{2}$ de π , de part et d'autre de π , bornes comprises.



Exercice 3

3 points

1) a. Multiplier par 100 décale la virgule de deux rangs vers la droite :

$$100a = 123,232\,323\dots = 122 + 1,232\,323\dots = 122 + a.$$

Les parties décimales de $100a$ et de a sont les mêmes ($0,232\,323\dots$) puisque le bloc « 23 » se répète sans fin. Donc $100a = 122 + a$: a est solution de l'équation $100x = 122 + x$.

b. On résout l'équation :

$$100a = 122 + a \iff 99a = 122 \iff a = \frac{122}{99}.$$

$$a = \frac{122}{99}$$

Cette fraction est irréductible : $122 = 2 \times 61$ et $99 = 3^2 \times 11$ n'ont aucun diviseur premier commun.

Vérification : $99 \times 1,232\,323\dots = 123,232\,3\dots - 1,232\,3\dots = 122$.

2) Le bloc « 345 » a trois chiffres : on multiplie par 1 000.

$$1\,000b = 12\,345,345\,345\dots = 12\,333 + 12,345\,345\dots = 12\,333 + b.$$

Donc

$$1000b - b = 12333 \iff 999b = 12333 \iff b = \frac{12333}{999} = \frac{3 \times 4111}{3 \times 333} = \frac{4111}{333}.$$

$$b = \frac{4111}{333}$$

Elle est irréductible : $333 = 3^2 \times 37$, et 4111 n'est divisible ni par 3 (somme des chiffres 7) ni par 37 ($37 \times 111 = 4107$, reste 4).

Vérification : $4111 = 12 \times 333 + 115$ et $\frac{115}{333} = \frac{345}{999} = 0,345345\dots$, donc $\frac{4111}{333} = 12,345345\dots$

Exercice 4

4 points

- 1) Le triangle SVN est équilatéral, donc $SV = SN$: le point S est à égale distance de V et de N , il appartient donc à la **médiatrice** du segment $[VN]$.

Le point I , milieu de $[VN]$, appartient aussi à cette médiatrice. La droite (SI) est donc la médiatrice de $[VN]$; elle est perpendiculaire à (VN) .

Ainsi $(SI) \perp (VI)$ et **le triangle VIS est rectangle en I** .

- 2) Dans le triangle VIS rectangle en I , d'hypoténuse $[SV]$, le théorème de Pythagore donne :

$$SV^2 = VI^2 + SI^2.$$

Or $SV = x$ (côté du triangle équilatéral) et $VI = \frac{VN}{2} = \frac{x}{2}$ (I milieu de $[VN]$). Donc

$$SI^2 = SV^2 - VI^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}.$$

Comme $SI > 0$ et $x > 0$:

$$SI = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{x^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}x}{2}, \quad \text{soit} \quad SI = x \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(On a utilisé la propriété démontrée à l'exercice 1 : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, et $\sqrt{x^2} = x$ car $x > 0$.)

- 3) Puisque $(SI) \perp (VN)$, le segment $[SI]$ est la **hauteur** du triangle SVN issue de S , relative à la base $[VN]$ de longueur x . Donc

$$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{VN \times SI}{2} = \frac{x \times x \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = x^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2},$$

$$\mathcal{A} = x^2 \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Vérification : pour $x = 2$, $SI = \sqrt{3}$ (en effet $2^2 - 1^2 = 3$) et $\mathcal{A} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = 2^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$.