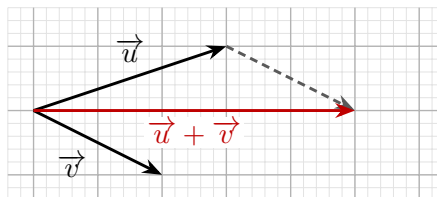


Exercice 1

3 points

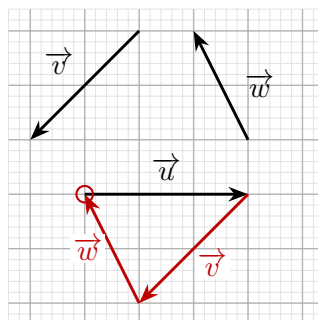
Sur chaque figure, une grande case vaut une unité. On lit les déplacements (horizontal; vertical) de chaque vecteur, puis on enchaîne les vecteurs « bout à bout » (relation de Chasles) : le vecteur somme va de l'origine du premier à l'extrémité du dernier. Les constructions sont en rouge.

- 1) On place un représentant de $\vec{v}$ à l'extrémité de $\vec{u}$. Le vecteur $\vec{u}$ fait 3 à droite et 1 vers le haut, $\vec{v}$ fait 2 à droite et 1 vers le bas : leur somme fait 5 à droite et 0 verticalement.



$\vec{u} + \vec{v}$ est horizontal, dirigé vers la droite, de longueur 5 unités.

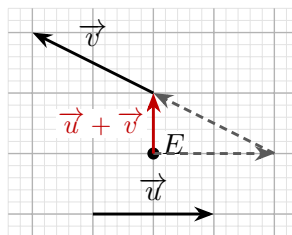
- 2) Lecture : $\vec{u}$: 3 à droite; $\vec{v}$: 2 à gauche et 2 vers le bas; $\vec{w}$: 1 à gauche et 2 vers le haut. On part de l'origine de $\vec{u}$, on trace $\vec{u}$, puis $\vec{v}$ à partir de son extrémité, puis $\vec{w}$ à partir de l'extrémité de $\vec{v}$: on revient au point de départ.



Horizontalement : $3 - 2 - 1 = 0$; verticalement : $0 - 2 + 2 = 0$. Donc

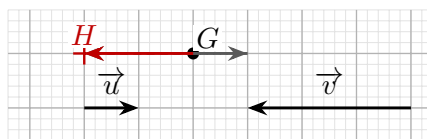
$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} : \text{c'est le vecteur nul.}$$

- 3) On trace, à partir de E , un représentant de $\vec{u}$ (2 à droite), puis à partir de son extrémité un représentant de $\vec{v}$ (2 à gauche et 1 vers le haut).



Le représentant de $\vec{u} + \vec{v}$ d'origine E est vertical, vers le haut, de longueur 1 unité (la somme fait $2 - 2 = 0$ horizontalement et $0 + 1 = 1$ verticalement).

- 4) $\vec{u}$ fait 1 vers la droite et $\vec{v}$ fait 3 vers la gauche : $\vec{u} + \vec{v}$ fait $1 - 3 = -2$, soit 2 unités vers la gauche. On part de G et on se déplace de 2 unités vers la gauche.



H est le point situé 2 unités à gauche de G , sur la même ligne horizontale.

Exercice 2

4 points

Proposition	V/F	Justification
Si $\vec{u} = \vec{v}$, alors $\ \vec{u}\ = \ \vec{v}\ $.	V	Deux vecteurs égaux ont même longueur.
Si $\ \vec{u}\ = \ \vec{v}\ $, alors $\vec{u} = \vec{v}$.	F	Contre-exemple : $\vec{v} = -\vec{u}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$.
$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.	V	C'est la caractérisation vectorielle du parallélogramme.
Si $AB = CD$, alors $ABCD$ est un parallélogramme.	F	Contre-exemple : un trapèze isocèle $ABCD$ de bases $[BC]$ et $[AD]$.
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors C est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.	V	C est l'image de D par cette translation si et seulement si $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.
Si le vecteur $\overrightarrow{DC}$ est un représentant du vecteur $\vec{u}$, alors $\overrightarrow{DC} = \vec{u}$.	V	C'est la définition d'un représentant.
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, alors les points A et B sont confondus.	F	Ce sont B et C qui sont confondus.
Si I est le milieu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$.	V	$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, donc, en changeant de sens, $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$.

Précisions. Pour la proposition 4 : dans le trapèze isocèle $ABCD$ ($[AD]$ et $[BC]$ parallèles, $AD \neq BC$), les côtés non parallèles vérifient $AB = CD$, mais $ABCD$ n'est pas un parallélogramme. Pour la proposition 7 : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ signifie que B et C sont tous deux l'image de A par la même translation, donc $B = C$; le point A peut être distinct de B .

Exercice 3

4 points

- 1) 4 appartient à l'intervalle $]2; 5]$, sur lequel $f(x)$ est négatif (signe « $-$ » dans le tableau), et f ne s'annule qu'en -1 et 2 . Donc

$$f(4) < 0.$$

- 2) D'après le tableau, $f(x)$ est strictement négatif sur $[-2; -1[$ et sur $]2; 5]$ (-1 et 2 sont exclus, car f s'y annule) :

$$S = [-2; -1[\cup]2; 5].$$

- 3) a. On développe :

$$\begin{aligned} (-x-1)(x-2) &= -x \times x + (-x) \times (-2) + (-1) \times x + (-1) \times (-2) \\ &= -x^2 + 2x - x + 2 \\ &= -x^2 + x + 2. \end{aligned}$$

Donc, pour tout réel x de $[-2; 5]$,

$$(-x-1)(x-2) = -x^2 + x + 2.$$

- b. On étudie le signe de chaque facteur :

- $-x-1=0 \iff x=-1$; coefficient de x égal à $-1 < 0$: $-x-1$ est positif puis négatif;
- $x-2=0 \iff x=2$; coefficient de x égal à $1 > 0$: $x-2$ est négatif puis positif.

On applique la règle des signes d'un produit :

x	-2	-1	2	5
$-x-1$	+	0	-	-
$x-2$	-	-	0	+
$-x^2+x+2$	-	0	+	-

Vérification : pour $x=0$, $-x^2+x+2=2>0$; pour $x=3$, $-9+3+2=-4<0$; pour $x=-2$, $-4-2+2=-4<0$.

- c. $-x^2+x+2 \geq 0$ sur $[-1; 2]$ (-1 et 2 sont inclus, car l'expression s'y annule et l'inégalité est large) :

$$S = [-1; 2].$$

Remarque : le tableau obtenu est identique à celui de $f(x)$ donné dans l'énoncé.

Exercice 4

5 points

Partie A

```

1 def f(x):
2     return x**2-6*x+5
3
4 def signe(x):
5     if f(x)>0:
6         return "f(",x,") est strictement positif"
7     elif f(x)<0:
8         return "f(",x,") est strictement négatif"
9     elif f(x)==0:
10        return "f(",x,") est nul"

```

La fonction `signe` renvoie trois éléments séparés par des virgules : Python les affiche entre parenthèses, sous la forme `('f(', x, ') est ...')`.

1) $f(0) = 0^2 - 6 \times 0 + 5 = \boxed{5}$.

Comme $f(0) = 5 > 0$, la condition de la ligne 5 est vraie : la fonction exécute la ligne 6. Le message renvoyé est

`('f(', 0, ') est strictement positif')`

c'est-à-dire « $f(0)$ est strictement positif ».

2) $f(2) = 2^2 - 6 \times 2 + 5 = 4 - 12 + 5 = -3$.

Comme $f(2) = -3$, la condition $f(x)>0$ (ligne 5) est fausse et la condition $f(x)<0$ (ligne 7) est vraie : la fonction exécute la ligne 8 et renvoie bien `('f(', 2, ') est strictement négatif')`, car $\boxed{f(2) = -3 < 0}$.

3) $f(1) = 1^2 - 6 \times 1 + 5 = 1 - 6 + 5 = 0$.

Les conditions des lignes 5 et 7 sont fausses, celle de la ligne 9 ($f(x)==0$) est vraie : la fonction exécute la ligne 10. Le message renvoyé est

`('f(', 1, ') est nul')`

car $f(1) = 0$.

Vérification : le script a été exécuté ; il affiche exactement ces trois messages pour `signe(0)`, `signe(2)` et `signe(1)`.

Partie B

- 1) On développe la forme obtenue en ligne 2 :

$$(x-1)(x-5) = x^2 - 5x - x + 5 = x^2 - 6x + 5 = f(x).$$

La factorisation est donc correcte :

$$f(x) = (x-1)(x-5).$$

- 2) En ligne 3, on a demandé au logiciel de factoriser l'expression $f(x) - f(3)$, c'est-à-dire la différence entre $f(x)$ et le nombre $f(3)$.

- 3) $f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 5 = 9 - 18 + 5$, donc

$$f(3) = -4.$$

- 4) D'après la ligne 3 du logiciel et la question précédente, pour tout réel x :

$$f(x) - f(3) = f(x) + 4 = (x-3)^2.$$

Vérification : $f(x) + 4 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ (identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$).

Un carré est toujours positif ou nul : $(x-3)^2 \geq 0$ pour tout réel x . Donc

$$f(x) + 4 \geq 0 \iff f(x) \geq -4 \quad \text{pour tout réel } x.$$

- 5) Pour tout réel x , $f(x) \geq -4$, et cette valeur est atteinte puisque $f(3) = -4$. Donc

$$\text{le minimum de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } -4, \text{ atteint en } x = 3.$$

Exercice 5

4 points

- 1) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (n'importe quel point convient à la place de B , pourvu que ce soit le même dans les deux vecteurs) :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}.$$

En changeant l'ordre des termes, puis avec la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \quad \text{donc} \quad \boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}}.$$

- 2) L'opposé d'un vecteur s'obtient en échangeant origine et extrémité : $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$, d'où

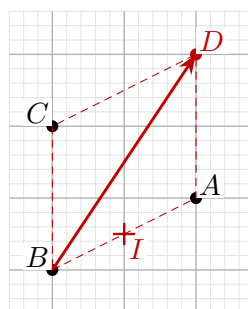
$$\boxed{\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}}.$$

Deux vecteurs égaux ont une différence nulle : $\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{0}$, d'où

$$\boxed{\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{0}}.$$

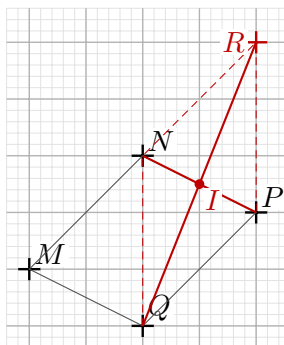
- 3) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$: d'après la règle du parallélogramme, D est le quatrième sommet du parallélogramme construit sur $[BA]$ et $[BC]$, soit $BADC$ est un parallélogramme. Sur le quadrillage (grandes cases), $\overrightarrow{BA}$ fait 2 à droite et 1 vers le haut, $\overrightarrow{BC}$ fait 2 vers le haut : D est à 2 à droite et 3 vers le haut de B .

- 4) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BI}$: on retrouve la proposition 8 de l'exercice 2, donc I est le milieu de $[AB]$.



- 5) a. R est le symétrique de M par rapport à N , donc N est le milieu de $[MR]$ et $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NR}$: sur le quadrillage, R est à 2 à droite et 2 vers le haut de N .
 $MNPQ$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.
 Les vecteurs égaux à $\overrightarrow{MN}$ (avec les points de la figure) sont donc

$$\overrightarrow{NR} \text{ et } \overrightarrow{QP}.$$



- b. D'après la question précédente, $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{NR}$. Par la caractérisation vectorielle du parallélogramme ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ avec $A = Q, B = P, C = R, D = N$), $QPRN$ **est un parallélogramme**.
 Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu : les diagonales $[QR]$ et $[PN]$ de $QPRN$ ont le même milieu. Or I est le milieu de $[NP]$. Donc

$$I \text{ est le milieu de } [QR].$$

Vérification sur le quadrillage : en prenant Q comme repère, N est en $(0; 3)$, P en $(2; 2)$ et R en $(2; 5)$; le milieu de $[NP]$ est $(1; 2,5)$, celui de $[QR]$ aussi.