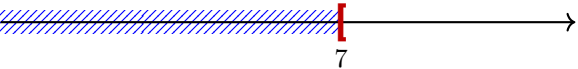
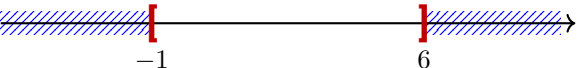
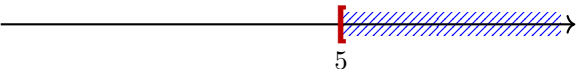
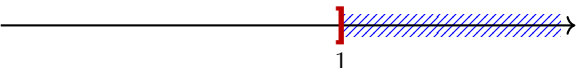


Exercice 1

3 points

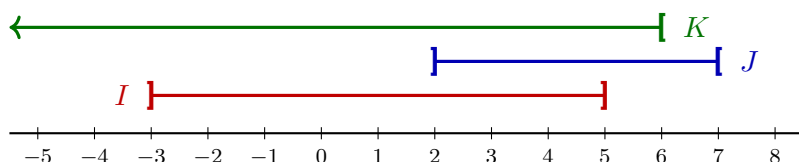
Un crochet tourné vers l'intérieur de l'intervalle indique que la borne est incluse ($\leq$ ou $\geq$); tourné vers l'extérieur, qu'elle est exclue ($<$ ou $>$). La partie hachurée en bleu est celle des nombres qui ne conviennent pas.

Inégalités	Intervalles	Représentation
$x \geq 7$	$x \in [7; +\infty[$	
$-1 \leq x \leq 6$	$x \in [-1; 6]$	
$x < 5$	$x \in]-\infty; 5[$	
$x \leq 1$	$x \in]-\infty; 1]$	

Exercice 2

3 points

On représente les trois intervalles sur une même droite graduée :



- $I \cap J$ contient les nombres qui sont à la fois dans I et dans J : strictement supérieurs à 2 et inférieurs ou égaux à 5.

$$I \cap J =]2; 5]$$

- Tout nombre de I est inférieur ou égal à 5, donc strictement inférieur à 6 : I est inclus dans K , et

$$I \cap K =]-3; 5] = I$$

- $J \cap K$: nombres strictement supérieurs à 2 et strictement inférieurs à 6.

$$J \cap K =]2; 6[$$

- $I \cup J$ contient les nombres qui sont dans I ou dans J . Les deux intervalles se chevauchent (sur $]2; 5]$), donc la réunion va de -3 (exclu) à 7 (exclu) sans interruption :

$$I \cup J =]-3; 7[$$

- $J \cup K$: K contient tous les nombres strictement inférieurs à 6 et J prolonge jusqu'à 7 exclu :

$$J \cup K =]-\infty; 7[$$

Exercice 3

6 points

Dans le repère orthonormé $(O; I, J)$, on lit sur la figure : $A(4; -2)$, $B(-4; 0)$, $C(2; 4)$, $D(0; 5)$, $E(2; 0)$, $F(-1; 2)$, $G(-2; -1)$.

1) Coordonnées dans les trois repères.

- Dans $(O; E, J)$, l'unité sur l'axe des abscisses est OE , qui mesure deux carreaux : l'abscisse lue dans $(O; I, J)$ est divisée par 2, l'ordonnée ne change pas.
- Dans $(O; I, F)$, l'axe des ordonnées est la droite (OF) , graduée par OF . Pour lire les coordonnées d'un point P , on trace la parallèle à (OF) passant par P : elle coupe l'axe (OI) à l'abscisse x' de P ; la parallèle à (OI) passant par P coupe (OF) à l'ordonnée y' de P . Autrement dit, $\overrightarrow{OP} = x' \overrightarrow{OI} + y' \overrightarrow{OF}$.
Par exemple, $\overrightarrow{OC} = 4 \overrightarrow{OI} + 2 \overrightarrow{OF}$: en partant de O , on avance de 4 carreaux vers la droite, puis deux fois de $\overrightarrow{OF}$ (un carreau à gauche, deux vers le haut), et l'on arrive bien en $C(2; 4)$.
Donc $C(4; 2)$ dans $(O; I, F)$.

Point	dans $(O; E, J)$	dans $(O; I, F)$	dans $(O; I, J)$
A	$(2; -2)$	$(3; -1)$	$(4; -2)$
B	$(-2; 0)$	$(-4; 0)$	$(-4; 0)$
C	$(1; 4)$	$(4; 2)$	$(2; 4)$
D	$(0; 5)$	$\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$	$(0; 5)$
E	$(1; 0)$	$(2; 0)$	$(2; 0)$
F	$\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$	$(0; 1)$	$(-1; 2)$
G	$(-1; -1)$	$\left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$	$(-2; -1)$
I	$\left(\frac{1}{2}; 0\right)$	$(1; 0)$	$(1; 0)$
J	$(0; 1)$	$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$	$(0; 1)$
O	$(0; 0)$	$(0; 0)$	$(0; 0)$

Vérification : pour D , $\frac{5}{2} \overrightarrow{OI} + \frac{5}{2} \overrightarrow{OF}$ a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}; 0 + 5\right) = (0; 5)$ dans $(O; I, J)$;
pour G , $-\frac{5}{2} \overrightarrow{OI} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OF}$ donne $\left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}; -1\right) = (-2; -1)$.

- Pour aller plus loin : de B à C , l'abscisse augmente de 6 et l'ordonnée de 4, l'ordonnée augmente donc de $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ quand l'abscisse augmente de 1. De C (abscisse 2) à H (abscisse 3), on obtient $y_H = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \approx 4,67$, d'où

- $$\boxed{L(1; -2)}.$$

4) M est le milieu de $[AD]$ avec $A(4; -2)$ et $D(0; 5)$:

$$x_M = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2 \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{-2 + 5}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$M \left(2; \frac{3}{2} \right)$$

- 5)** Le repère $(O; I, J)$ est orthonormé, donc avec $E(2; 0)$ et $F(-1; 2)$:

$$EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2} = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{9 + 4}, \quad EF = \sqrt{13}.$$

- 6) Les diagonales du quadrilatère $BGCD$ sont $[BC]$ et $[GD]$. Calculons leurs milieux :

$$\begin{aligned} \text{milieu de } [BC] &: \left(\frac{-4+2}{2}; \frac{0+4}{2} \right) = (-1; 2), \\ \text{milieu de } [GD] &: \left(\frac{-2+0}{2}; \frac{-1+5}{2} \right) = (-1; 2). \end{aligned}$$

Les diagonales ont le même milieu (c'est le point F), donc

$BGCD$ est un parallélogramme.

3

7) Avec $G(-2; -1)$, $L(1; -2)$ et $F(-1; 2)$, dans le repère orthonormé :

$$GL^2 = (1 + 2)^2 + (-2 + 1)^2 = 9 + 1 = 10,$$

$$GF^2 = (-1 + 2)^2 + (2 + 1)^2 = 1 + 9 = 10,$$

$$LF^2 = (-1 - 1)^2 + (2 + 2)^2 = 4 + 16 = 20.$$

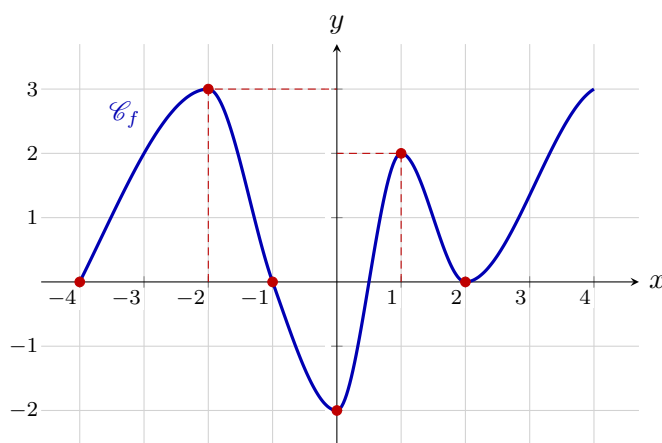
- $GL = GF = \sqrt{10}$: le triangle est isocèle en G ;
- $GL^2 + GF^2 = 10 + 10 = 20 = LF^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, il est rectangle en G .

 GLF est un triangle rectangle isocèle en G .

Exercice 4

3 points

On lit les coordonnées des points de $\mathcal{C}_f$: un point $(x; y)$ de la courbe signifie que $f(x) = y$, c'est-à-dire que y est l'image de x et x un antécédent de y .



- a. Le point $(-2; 3)$ est sur $\mathcal{C}_f$, donc $f(-2) = 3$: -2 est un antécédent de 3 par la fonction f .
 - b. Le point $(0; -2)$ est sur $\mathcal{C}_f$, donc $f(0) = -2$: 0 est un antécédent de -2 par la fonction f .
 - c. Les antécédents de 0 sont les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ rencontre l'axe des abscisses : on lit -4 , -1 et 2 (et un quatrième, environ 0,5). Par exemple : -1 est un antécédent de 0 par la fonction f (les réponses -4 , 2 ou environ 0,5 conviennent aussi).
 - d. Le point $(-4; 0)$ est sur $\mathcal{C}_f$, donc $f(-4) = 0$: 0 est l'image de -4 par la fonction f .
- « 1 est un antécédent de 2 par f » signifie $f(1) = 2$ (le point $(1; 2)$ est bien sur $\mathcal{C}_f$), ce qui se dit aussi :

« 2 est l'image de 1 par f ».

Exercice 5

3 points

On utilise $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ (pour $a, b \geq 0$), $(\sqrt{a})^2 = a$ et les identités remarquables.

Calcul de A. Comme $50 = 25 \times 2$, on a $\sqrt{50} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$, donc $3\sqrt{50} = 15\sqrt{2}$. Avec $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$(3 - 2\sqrt{2})^2 = 3^2 - 2 \times 3 \times 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 = 9 - 12\sqrt{2} + 4 \times 2 = 17 - 12\sqrt{2}.$$

$$A = 15\sqrt{2} + 17 - 12\sqrt{2}, \quad \boxed{A = 17 + 3\sqrt{2}}.$$

Calcul de B. On développe le produit :

$$(2\sqrt{3} - 3)(5 - \sqrt{3}) = 10\sqrt{3} - 2(\sqrt{3})^2 - 15 + 3\sqrt{3} = 10\sqrt{3} - 6 - 15 + 3\sqrt{3} = -21 + 13\sqrt{3}.$$

Avec $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$(4 + \sqrt{3})^2 = 16 + 8\sqrt{3} + 3 = 19 + 8\sqrt{3}.$$

$$B = -21 + 13\sqrt{3} - (19 + 8\sqrt{3}) = -21 + 13\sqrt{3} - 19 - 8\sqrt{3}, \quad \boxed{B = -40 + 5\sqrt{3}}.$$

Vérification : 2 et 3 sont les plus petits entiers possibles sous les radicaux (ils n'ont aucun facteur carré autre que 1).

Exercice 6

2 points

1) On développe le membre de droite :

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + (3x + 4)(x - 1) &= x^2 - 2x + 1 + 3x^2 - 3x + 4x - 4 \\ &= 4x^2 - x - 3. \end{aligned}$$

On retrouve le membre de gauche : pour tout réel x ,

$$\boxed{4x^2 - x - 3 = x^2 - 2x + 1 + (3x + 4)(x - 1)}.$$

2) On reconnaît $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a = x - 7$ et $b = 2x + 1$:

$$\begin{aligned} (x - 7)^2 - (2x + 1)^2 &= [(x - 7) - (2x + 1)][(x - 7) + (2x + 1)] \\ &= (-x - 8)(3x - 6) \\ &= -(x + 8) \times 3(x - 2) \\ &= -3(x - 2)(x + 8). \end{aligned}$$

Donc, pour tout réel x ,

$$\boxed{(x - 7)^2 - (2x + 1)^2 = -3(x - 2)(x + 8)}.$$

Vérification en développant les deux membres : $(x - 7)^2 - (2x + 1)^2 = x^2 - 14x + 49 - 4x^2 - 4x - 1 = -3x^2 - 18x + 48$ et $-3(x - 2)(x + 8) = -3(x^2 + 6x - 16) = -3x^2 - 18x + 48$.