

Exercice 1

2 points

- 1) Dire que f admet un minimum en a sur I signifie que, pour tout réel x de I , $f(x) \geq f(a)$.
Autrement dit, $f(a)$ est la plus petite valeur prise par f sur I : c'est le minimum de f sur I .
- 2) Dire que la fonction f est croissante sur I signifie que, pour tous réels u et v de I , si $u \leq v$, alors $f(u) \leq f(v)$.
Autrement dit, une fonction croissante conserve l'ordre.

Exercice 2

2,5 points

Soient u et v deux réels quelconques tels que $u \leq v$.

$$\begin{aligned}
 u \leq v &\iff -2u \geq -2v && \text{car on multiplie par } -2 < 0 : \text{l'ordre change} \\
 &\iff -2u + 3 \geq -2v + 3 && \text{car on ajoute 3 : l'ordre est conservé} \\
 &\iff f(u) \geq f(v).
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tous réels $u \leq v$, on a $f(u) \geq f(v)$: la fonction f inverse l'ordre, donc

f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Vérification : $f(0) = 3$ et $f(1) = 1$: on a bien $0 \leq 1$ et $f(0) \geq f(1)$. C'est cohérent avec le cours : une fonction affine $x \mapsto mx + p$ de coefficient directeur $m = -2 < 0$ est décroissante.

Exercice 3

4 points

On s'appuie sur le tableau de variations :

x	-6	-1	3	9
variations de f	-1	5	-2	3

- a. Sur $[3; 9]$, f est croissante de -2 à 3 , donc pour tout $x \in [3; 9]$, $f(x) \leq f(9) = 3$. Vrai
- b. Sur $[-6; -1]$, f est croissante de $f(-6) = -1$ à $f(-1) = 5$. Elle prend donc toutes les valeurs comprises entre -1 et 5 ; or $-1 \leq 2 \leq 5$, donc 2 admet un antécédent dans $[-6; -1]$. Vrai
- c. Le minimum de f sur $[-6; 9]$ est -2 , atteint en $x = 3$ (l'autre valeur « basse » du tableau, $f(-6) = -1$, est plus grande que -2). Donc pour tout $x \in [-6; 9]$, $f(x) \geq -2$. Vrai
- d. Sur $[3; 9]$, f est croissante, donc pour tout $x \in [3; 9]$, $f(x) \geq f(3) = -2$. Aucun réel de $[3; 9]$ ne vérifie $f(x) < -2$. Faux

- e. Sur $[-6; -1]$, f est croissante et $x \neq -1$, donc $-1 \leq f(x) < 5$. En multipliant par $-1 < 0$, l'ordre change : $1 \geq -f(x) > -5$, c'est-à-dire $-5 < -f(x) \leq 1$. A fortiori $-5 \leq -f(x) \leq 1$. Vrai
- f. Pour $x = -1$, qui appartient à $[-1; 3]$, on a $f(-1) = 5 \geq 4,9$. Vrai
- g. On a $-6 \leq -5 \leq -2 \leq -1$ et f est croissante sur $[-6; -1]$: elle conserve l'ordre, donc $f(-5) \leq f(-2)$. Vrai
- h. $f(x) + 1 = 5 \iff f(x) = 4$. Sur $[-6; -1]$, f prend toutes les valeurs entre -1 et 5 , donc la valeur 4 est atteinte (elle l'est aussi sur $[-1; 3]$, où f décroît de 5 à -2). Vrai

Exercice 4

3 points

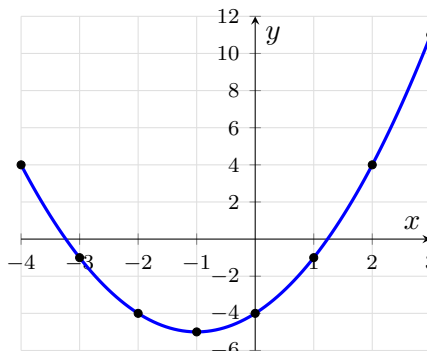
La calculatrice donne la table de valeurs de $f(x) = x^2 + 2x - 4$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	-1	-4	-5	-4	-1	4	11

Par exemple : $f(2) = 2^2 + 2 \times 2 - 4 = 4$ et $f(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) - 4 = -5$.

- 1)
 - a. $f(2) = 4$.
 - b. $f(1) = 1 + 2 - 4 = -1$: l'image de 1 par f est -1 .
 - c. Dans la table, -5 n'apparaît qu'une fois : -5 admet un unique antécédent, -1 . (De même, 11 admet un unique antécédent dans la table, 3.)
 - d. Dans la table, 4 apparaît deux fois : 4 admet deux antécédents, -4 et 2. (Convienent aussi : -1 , d'antécédents -3 et 1, et -4 , d'antécédents -2 et 0.)
- 2) On veut voir la courbe sur $[-4; 3]$: on prend $X_{\min} = -4$ et $X_{\max} = 3$.
D'après la table, les valeurs de $f(x)$ vont de -5 (le plus bas, en $x = -1$) à 11 (le plus haut, en $x = 3$). On choisit une fenêtre un peu plus large : $Y_{\min} = -6$ et $Y_{\max} = 12$.

WINDOW	
Xmin =	-4
Xmax =	3
Xscl =	1
Ymin =	-6
Ymax =	12
Yscl =	1
Xres =	1



Toute fenêtre avec $X_{\min} = -4$, $X_{\max} = 3$, $Y_{\min}$ un peu inférieur à -5 et $Y_{\max}$ un peu supérieur à 11 convient.

Exercice 5

2,5 points

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} x^2 \geq 0 &\iff -x^2 \leq 0 && \text{car on multiplie par } -1 < 0 : \text{l'ordre change} \\ &\iff -x^2 + 4 \leq 4 && \text{car on ajoute 4 : l'ordre est conservé} \\ &\iff f(x) \leq 4. \end{aligned}$$

La première inégalité est vraie (un carré est toujours positif), donc $f(x) \leq 4$ pour tout réel x .

De plus $f(0) = -0^2 + 4 = 4$: la valeur 4 est atteinte.

Cela signifie que la fonction f admet un maximum sur $\mathbb{R}$:

le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est 4, atteint en $x = 0$.

Exercice 6

4 points

- 1) Le point M décrit le segment $[AB]$, de longueur 6 cm, donc $0 \leq AM \leq 6$:

$$x \in [0; 6].$$

- 2) Oui : la fonction `aire` possède un argument, x (la longueur $AM = BN$), comme l'indique la première ligne `def aire(x) :`.

- 3) a. Le triangle AMD est rectangle en A et le triangle DNC est rectangle en C , avec $NC = 6 - x$:

$$a = \frac{AM \times AD}{2} = \frac{6x}{2} = 3x, \quad b = \frac{DC \times NC}{2} = \frac{6(6-x)}{2} = -3x + 18.$$

La fonction $x \mapsto 3x$ est une **fonction linéaire** (cas particulier de fonction affine) et la fonction $x \mapsto -3x + 18$ est une **fonction affine**. Les deux aires sont donc des fonctions affines de x .

- b. Pour $x = 1,5$, le script calcule :

$$a = 3 \times 1,5 = 4,5, \quad b = -3 \times 1,5 + 18 = 13,5, \quad c = 36 - 4,5 - 13,5 = \boxed{18}.$$

Python affiche 18.0 (avec « .0 ») car le calcul a été fait avec le nombre décimal 1.5.

- c. L'aire du carré est $6^2 = 36 \text{ cm}^2$ et le quadrilatère $DMBN$ est le carré privé des deux triangles AMD et DNC . Pour tout $x \in [0; 6]$:

$$c = 36 - a - b = 36 - 3x - (-3x + 18) = 36 - 3x + 3x - 18 = \boxed{18}.$$

L'aire c vaut donc 18 cm^2 quelle que soit la position de M : c'est une fonction constante.

- d. D'après la question précédente, la fonction renvoie toujours 18 :

```
>>> aire(1)
18
>>> aire(3)
18
```

(Avec les entiers 1 et 3, tous les calculs restent entiers : Python affiche 18 et non 18.0.
Détail pour $x = 3$: $a = 9$, $b = 9$, $c = 36 - 9 - 9 = 18$.)

Exercice 7

2 points

Mise en équation. Dans le repère $(O; C, A)$: $O(0; 0)$, $C(1; 0)$, $A(0; 1)$ et $B(1; 2)$. Le point M est sur $[OC]$: on note x son abscisse, $M(x; 0)$ avec $x \in [0; 1]$. Ainsi $OM = x$ et $MC = 1 - x$.

Aires des triangles.

- OAM est rectangle en O :

$$\mathcal{A}_{OAM} = \frac{OM \times OA}{2} = \frac{x \times 1}{2} = \frac{x}{2}.$$

- MBC est rectangle en C (le segment $[CB]$ est vertical) et $CB = 2$:

$$\mathcal{A}_{MBC} = \frac{MC \times CB}{2} = \frac{(1 - x) \times 2}{2} = 1 - x.$$

Somme des aires. Pour tout $x \in [0; 1]$:

$$S(x) = \frac{x}{2} + 1 - x = -\frac{1}{2}x + 1.$$

S est une fonction affine de coefficient directeur $-\frac{1}{2} < 0$: elle est **décroissante** sur $[0; 1]$. Sa plus grande valeur est donc atteinte pour la plus petite valeur de x , soit $x = 0$:

$$S(0) = 1 \quad \text{et, pour tout } x \in [0; 1], \quad S(x) \leq 1.$$

Vérification : $S(0,5) = 0,75$ et $S(1) = 0,5$, bien inférieurs à 1.

Conclusion. La somme des aires est maximale lorsque M est en O ; elle vaut alors 1 unité d'aire.

Remarque : dans cette position, le triangle OAM est « aplati » (d'aire nulle) et toute l'aire vient du triangle OBC . Plus M s'éloigne de O , plus l'aire gagnée par OAM ($\frac{1}{2}$ par unité) est inférieure à l'aire perdue par MBC (1 par unité).