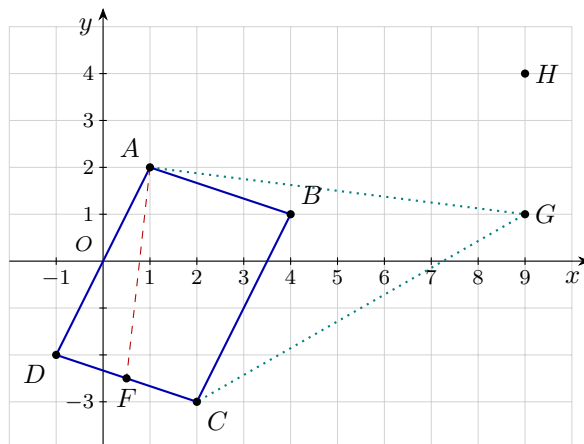


Exercice 1

8 points

Figure de contrôle (le point $E(7; 14)$, très haut, n'y figure pas) :



1) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$:

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 2-(-1) \\ -3-(-2) \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les deux vecteurs ont les mêmes coordonnées, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

De plus, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 3 \times (-5) - (-1) \times 1 = -14 \neq 0$: les points A, B, C ne sont pas alignés.

Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, on conclut que

$ABCD$ est un parallélogramme.

2) A, D, E sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1-1 \\ -2-2 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 7-1 \\ 14-2 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = (-2) \times 12 - (-4) \times 6 = -24 + 24 = 0.$$

Les vecteurs sont colinéaires (en effet $\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AD}$), donc

A, D et E sont alignés.

3) F est le milieu de $[CD]$:

$$x_F = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{2 + (-1)}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y_F = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{-3 + (-2)}{2} = -\frac{5}{2}.$$

Ainsi

$F(0,5; -2,5)$.

- 4) Les droites (AF) et (EB) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 0,5 - 1 \\ -2,5 - 2 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} -0,5 \\ -4,5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EB} \begin{pmatrix} 4 - 7 \\ 1 - 14 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{EB} \begin{pmatrix} -3 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EB}) = (-0,5) \times (-13) - (-4,5) \times (-3) = 6,5 - 13,5 = -7 \neq 0.$$

Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc

les droites (AF) et (EB) ne sont pas parallèles.

- 5) Le repère est orthonormé, on peut donc calculer les normes :

$$AG = \|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{(x_G - x_A)^2 + (y_G - y_A)^2} = \sqrt{(9 - 1)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65},$$

$$CG = \|\overrightarrow{CG}\| = \sqrt{(x_G - x_C)^2 + (y_G - y_C)^2} = \sqrt{(9 - 2)^2 + (1 - (-3))^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}.$$

$$\|\overrightarrow{AG}\| = \|\overrightarrow{CG}\| = \sqrt{65}$$

Le point G est à égale distance de A et de C : G appartient à la médiatrice de $[AC]$.

- 6) On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$, donc

$$2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 2 \times 3 + \frac{1}{3} \times 6 \\ 2 \times (-1) + \frac{1}{3} \times 12 \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} x_H - 1 \\ y_H - 2 \end{pmatrix}$. L'égalité des vecteurs donne :

$$\begin{cases} x_H - 1 = 8 \\ y_H - 2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_H = 9 \\ y_H = 4 \end{cases}$$

Ainsi

$$H(9; 4).$$

Exercice 2

3 points

On calcule les coordonnées des vecteurs directeurs :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} k-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 12-4 \\ k-1 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 8 \\ k-1 \end{pmatrix}.$$

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si ces vecteurs sont colinéaires, c'est-à-dire si leur déterminant est nul :

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 &\iff (k-1)(k-1) - 2 \times 8 = 0 \\ &\iff (k-1)^2 - 4^2 = 0 \\ &\iff ((k-1) - 4)((k-1) + 4) = 0 \quad (\text{identité } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)) \\ &\iff (k-5)(k+3) = 0 \\ &\iff k-5 = 0 \quad \text{ou} \quad k+3 = 0 \quad (\text{produit nul}) \\ &\iff k = 5 \quad \text{ou} \quad k = -3. \end{aligned}$$

$k = 5 \quad \text{ou} \quad k = -3$

Vérification :

- pour $k = 5$: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{CD} = 2 \overrightarrow{AB}$;
- pour $k = -3$: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{CD} = -2 \overrightarrow{AB}$.

Dans les deux cas, C n'est pas sur (AB) (car $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, de seconde coordonnée $2 \neq 0$) : les droites sont parallèles et distinctes.

Exercice 3

6 points

- 1) Une hausse de 20 % correspond au coefficient multiplicateur $1 + \frac{20}{100} = 1,2$.

$$\text{Prix TTC} = 140 \times 1,2 = 168.$$

Le prix TTC est de 168 €.

Vérification : la TVA vaut $140 \times 0,2 = 28$ €, et $140 + 28 = 168$.

- 2) Le taux d'évolution entre une valeur de départ V_D et une valeur d'arrivée V_A est $t = \frac{V_A - V_D}{V_D}$.

$$t = \frac{300,35 - 264,16}{264,16} = \frac{36,19}{264,16} \approx 0,1370.$$

Le cours de l'action a augmenté d'environ 13,70 %.

- 3) Une réduction de 20 % correspond au coefficient multiplicateur $1 - \frac{20}{100} = 0,8$. Si P est le prix avant la réduction :

$$P \times 0,8 = 360 \iff P = \frac{360}{0,8} = 450.$$

Le prix avant la réduction était de 450 €.

Vérification : $450 \times 0,8 = 360$. (Attention : ajouter 20 % à 360 € donnerait 432 €, ce qui est faux, car les 20 % portent sur l'ancien prix.)

- 4) Les coefficients multiplicateurs sont 1,2 (hausse de 20 %), 0,7 (baisse de 30 %) et 0,9 (baisse de 10 %). Le coefficient multiplicateur global est leur produit :

$$CM = 1,2 \times 0,7 \times 0,9 = 0,756.$$

Le taux global est donc $t = CM - 1 = 0,756 - 1 = -0,244$.

Le prix a globalement baissé de 24,4 %.

- 5) Les coefficients multiplicateurs sont 0,8 (baisse de 20 %) et $1 - \frac{x}{100}$ (baisse de x %). Une baisse globale de 42 % correspond au coefficient $1 - 0,42 = 0,58$. On a donc :

$$\begin{aligned} 0,8 \left(1 - \frac{x}{100}\right) &= 0,58 \iff 1 - \frac{x}{100} = \frac{0,58}{0,8} && \text{(on divise par } 0,8 > 0) \\ \iff 1 - \frac{x}{100} &= 0,725 \\ \iff \frac{x}{100} &= 1 - 0,725 = 0,275 \\ \iff x &= 27,5. \end{aligned}$$

$x = 27,5$

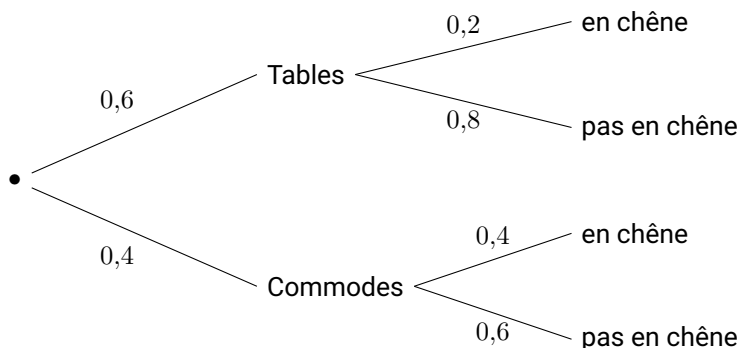
La fréquentation a donc baissé de 27,5 % lors de la seconde baisse.

Vérification : $0,8 \times 0,725 = 0,58$, soit bien une baisse globale de 42 %. (Les pourcentages successifs ne s'additionnent pas : x n'est pas égal à $42 - 20 = 22$.)

Exercice 4

3 points

On résume la situation par un arbre (proportions exprimées en décimal) :



La proportion d'une partie d'une partie s'obtient en multipliant les proportions :

- tables en chêne : $0,6 \times 0,2 = 0,12$, soit 12 % des meubles vendus ;
- commodes en chêne : $0,4 \times 0,4 = 0,16$, soit 16 % des meubles vendus.

Ces deux catégories sont disjointes, on additionne :

$$0,12 + 0,16 = 0,28.$$

28 % des meubles vendus l'an dernier étaient en chêne.

Vérification sur 100 meubles : 60 tables dont 12 en chêne, 40 commodes dont 16 en chêne, soit 28 meubles en chêne sur 100.