

Exercice 1

7 points

Toutes les réponses sont lues sur la courbe $\mathcal{C}_f$: ce sont des lectures graphiques, donc des valeurs approchées lorsque le point ne tombe pas sur un nœud du quadrillage.

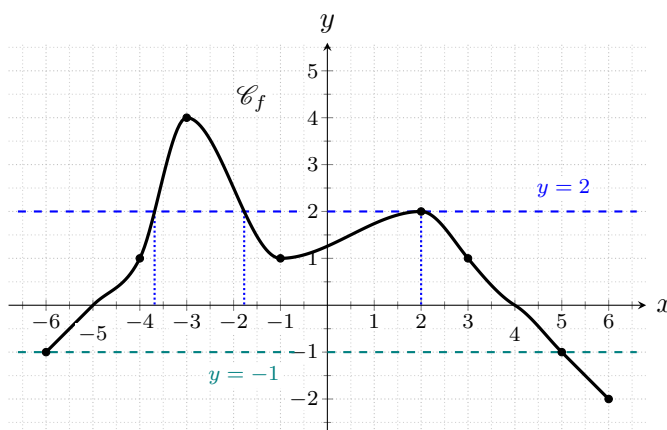
- 1) La courbe commence au point d'abscisse -6 et s'arrête au point d'abscisse 6 ; les deux extrémités sont des points pleins, donc elles font partie de la courbe. Tout réel compris entre -6 et 6 a une image, et seulement eux :

$$\mathcal{D}_f = [-6; 6].$$

- 2) On part de $x = 5$ sur l'axe des abscisses, on rejoint verticalement la courbe et on lit l'ordonnée du point obtenu, le point $(5; -1)$:

$$f(5) = -1.$$

- 3) On cherche les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée 2 : on trace la droite horizontale d'équation $y = 2$ et on lit les abscisses des points d'intersection avec la courbe.



La droite coupe la courbe en trois points. Le nombre 2 a donc **trois antécédents** par f :

$$x \approx -3,7, \quad x \approx -1,8 \quad \text{et} \quad x = 2.$$

Vérification : le point $(2; 2)$ est un point marqué de la courbe, donc $f(2) = 2$ exactement ; les deux autres valeurs sont lues avec la précision du quadrillage.

- 4) La courbe monte de $(-6; -1)$ à $(-3; 4)$, descend jusqu'à $(-1; 1)$, remonte jusqu'à $(2; 2)$, puis descend jusqu'à $(6; -2)$.

x	-6	-3	-1	2	6
variations de f		4	1	2	-2

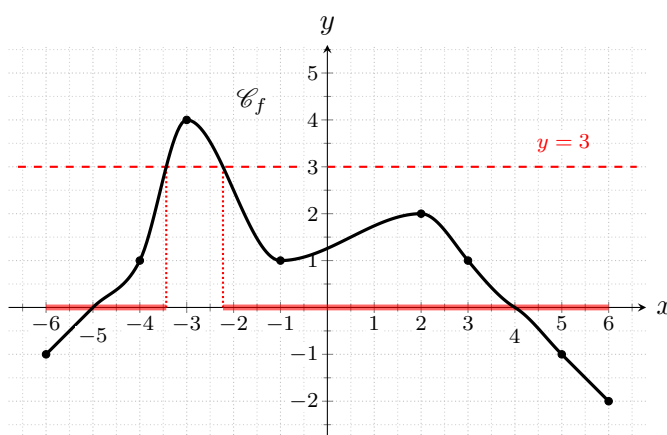
- 5) La courbe coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -5 et 4 : $f(-5) = 0$ et $f(4) = 0$. Elle est en dessous de l'axe sur $[-6; -5[$, au-dessus sur $] -5; 4[$ (son point le plus bas sur cet intervalle est $(-1; 1)$, d'ordonnée positive), puis à nouveau en dessous sur $]4; 6]$.

x	-6	-5	4	6	
signe de $f(x)$	-	0	+	0	-

- 6) On cherche les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée -1 (droite verte en pointillés sur la figure de la question 3). La droite d'équation $y = -1$ rencontre la courbe en deux points : $(-6; -1)$ et $(5; -1)$. Donc

$$S = \{-6; 5\}.$$

- 7) On cherche les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés **sur ou en dessous** de la droite d'équation $y = 3$.



La courbe ne passe au-dessus de cette droite qu'autour du sommet $(-3; 4)$, entre deux points d'intersection d'abscisses environ $-3,4$ et $-2,2$. Partout ailleurs sur $[-6; 6]$, elle est en dessous (ou sur la droite aux deux points d'intersection, qui sont donc inclus). Ainsi

$$S \approx [-6; -3,4] \cup [-2,2; 6].$$

Exercice 2

3 points

D'après le tableau, g est strictement croissante sur $[-8; -2]$, strictement décroissante sur $[-2; 2]$ et strictement croissante sur $[2; 7]$.

- 1) -5 et -3 appartiennent tous deux à l'intervalle $[-8; -2]$, sur lequel g est strictement croissante. Une fonction croissante **conserve l'ordre** : comme $-5 < -3$,

$$g(-5) < g(-3).$$

- 2) -1 et 1 appartiennent tous deux à l'intervalle $[-2; 2]$, sur lequel g est strictement décroissante. Une fonction décroissante **inverse l'ordre** : comme $-1 < 1$,

$$g(-1) > g(1).$$

3) -4 et 3 ne sont pas dans un même intervalle où g est monotone : on ne peut pas utiliser directement le sens de variation. On compare chacun des deux nombres à 0 .

- $-4 \in [-8; -2]$, où g est strictement croissante; comme $-8 < -4$, on a $g(-8) < g(-4)$, c'est-à-dire $g(-4) > 0$.
- $3 \in [2; 7]$, où g est strictement croissante; comme $3 < 7$, on a $g(3) < g(7)$, c'est-à-dire $g(3) < 0$.

Ainsi $g(3) < 0 < g(-4)$, d'où

$$g(-4) > g(3).$$

Exercice 3

3 points

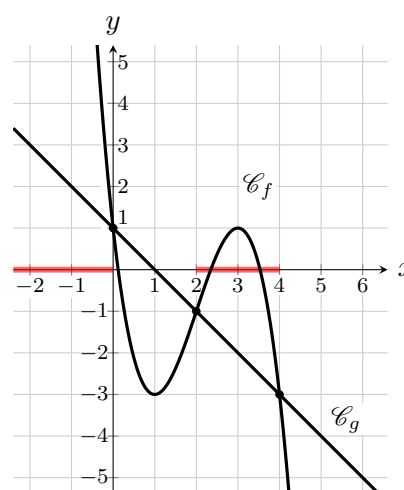
Résoudre graphiquement $f(x) \geq g(x)$, c'est trouver les abscisses des points où la courbe $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de la courbe $\mathcal{C}_g$ **ou la coupe**.

Les deux courbes se coupent en trois points : $(0; 1)$, $(2; -1)$ et $(4; -3)$.

- Pour $x \leq 0$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.
- Pour $0 < x < 2$: $\mathcal{C}_f$ est en dessous.
- Pour $2 \leq x \leq 4$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus.
- Pour $x > 4$: $\mathcal{C}_f$ est en dessous.

Les abscisses des points d'intersection sont incluses car l'inégalité est large. Ainsi

$$S =]-\infty; 0] \cup [2; 4].$$



Exercice 4

7 points

1) On calcule d'abord la parenthèse, en mettant les fractions au même dénominateur.

$$\begin{aligned} A &= -\frac{14}{30} - \left(\frac{-1}{6} + \frac{1}{5} \right) \\ &= -\frac{14}{30} - \left(\frac{-5}{30} + \frac{6}{30} \right) \\ &= -\frac{14}{30} - \frac{1}{30} \\ &= -\frac{15}{30} \\ &= -\frac{15 \times 1}{15 \times 2} \end{aligned}$$

$$A = -\frac{1}{2}.$$

Pour B , on calcule séparément chaque parenthèse :

$$\frac{5}{2} - \frac{8}{3} = \frac{15}{6} - \frac{16}{6} = -\frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}.$$

Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse :

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{6} \div \frac{7}{12} \\ &= -\frac{1}{6} \times \frac{12}{7} \\ &= -\frac{12}{42} \\ &= -\frac{6 \times 2}{6 \times 7} \end{aligned}$$

$$\boxed{B = -\frac{2}{7}}.$$

2) a. On respecte les priorités : parenthèses, puis puissances, puis multiplication, puis addition.

$$\begin{aligned} C &= 3^3 \times (23 - 5^2)^3 + (2 - 3)^4 \\ &= 27 \times (23 - 25)^3 + (-1)^4 \\ &= 27 \times (-2)^3 + 1 \\ &= 27 \times (-8) + 1 \\ &= -216 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{C = -215}.$$

Attention : $23 - 5^2 = 23 - 25 = -2$ et $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$; $(-1)^4 = 1$ car l'exposant est pair.

b. On écrit chaque nombre comme une puissance de 3 : $81 = 3^4$, $9 = 3^2$ et $27 = 3^3$. On utilise $(a^m)^n = a^{m \times n}$, $a^m \times a^n = a^{m+n}$ et $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

$$\begin{aligned} D &= \frac{81^4 \times 9^{-2}}{27^{-3}} \\ &= \frac{(3^4)^4 \times (3^2)^{-2}}{(3^3)^{-3}} \\ &= \frac{3^{16} \times 3^{-4}}{3^{-9}} \\ &= \frac{3^{12}}{3^{-9}} \\ &= 3^{12-(-9)} \end{aligned}$$

$$\boxed{D = 3^{21}}, \quad \text{donc } p = 21.$$