

Exercice 1

7 points

1) Avec $n = 0$ puis $n = 1$ dans la relation de récurrence :

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \boxed{\frac{7}{4}}$$

$$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{21}{16} + \frac{4}{16} + \frac{16}{16} = \boxed{\frac{41}{16}}$$

Vérification avec le tableur : $\frac{7}{4} = 1,75$ et $\frac{41}{16} = 2,5625$.

2) a. La cellule B3 contient u_1 , calculé à partir de u_0 (cellule B2) et de $n = 0$ (cellule A2). On peut écrire :

$$\boxed{=3/4*B2+1/4*A2+1}$$

(ou $=0,75*B2+0,25*A2+1$). En l'étirant vers le bas, les références deviennent B3, A3, puis B4, A4, etc.

b. Les valeurs affichées $1 < 1,75 < 2,5625 < 3,421875 < 4,31640625$ augmentent : on conjecture que la suite (u_n) est **croissante**.

3) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: « $n \leq u_n \leq n + 1$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie.

$$\begin{aligned} n &\leq u_n \leq n + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4}n &\leq \frac{3}{4}u_n \leq \frac{3}{4}n + \frac{3}{4} && \text{(on multiplie par } \frac{3}{4} > 0) \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n + 1 &\leq \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leq \frac{3}{4}n + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}n + 1 && \text{(on ajoute } \frac{1}{4}n + 1) \\ \Leftrightarrow n + 1 &\leq u_{n+1} \leq n + \frac{7}{4} \\ \Rightarrow n + 1 &\leq u_{n+1} \leq n + 2 && \text{(car } \frac{7}{4} \leq 2) \end{aligned}$$

$P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$\boxed{n \leq u_n \leq n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

b. *Sens de variation.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après 3)a. appliqué aux rangs $n + 1$ et n :

$$u_{n+1} \geq n + 1 \geq u_n.$$

Donc $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n : la suite (u_n) est **croissante**, ce qui confirme la conjecture.

Limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$. Par comparaison :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.}$$

c. Pour tout entier $n \geq 1$, on divise l'encadrement de 3)a. par $n > 0$:

$$1 \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

4) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) \\ &= \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1 \\ &= \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}n \\ &= \frac{3}{4}(u_n - n) = \frac{3}{4}v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{3}{4}$, de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 1$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Comme $u_n = v_n + n$:

$$u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n.$$

Vérification : $u_1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$ et $u_2 = \frac{9}{16} + 2 = \frac{41}{16}$.

c. Comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$; et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$. Par somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Oui, on retrouve la limite obtenue en 3)b.

Exercice 2

7 points

1) a. $u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = \boxed{2}$ et $v_1 = 2u_0 + v_0 = 2 + 1 = \boxed{3}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = 2u_n + v_n - v_n = 2u_n > 0 \quad (\text{car } u_n > 0).$$

La suite (v_n) est donc strictement croissante.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq v_0 = 1$, c'est-à-dire $v_n \geq 1$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: « $u_n \geq n + 1$ ».

Initialisation. $u_0 = 1 \geq 0 + 1 : P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie.

$$\begin{aligned} u_n &\geq n + 1 \\ \iff u_n + v_n &\geq n + 1 + v_n \quad (\text{on ajoute } v_n) \\ \iff u_{n+1} &\geq n + 1 + v_n \\ \implies u_{n+1} &\geq n + 2 \quad (\text{car } v_n \geq 1 \text{ d'après 1)b.}) \end{aligned}$$

$P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, $u_n \geq n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n + 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$. Par comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

- 2) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{n+1}$ vaut 1 ou -1 , donc $-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1$.
On divise par $u_n^2 > 0$ (car $u_n > 0$), ce qui conserve le sens des inégalités :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}.$$

- b. D'après 1)d., $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = +\infty$, d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{u_n^2} \right) = 0.$$

D'après l'encadrement du a. et le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0.$$

- c. Comme $r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n^2 = 2$.

Pour tout n , $r_n = \frac{v_n}{u_n} > 0$ (quotient de deux nombres strictement positifs), donc $r_n = \sqrt{r_n^2}$.

La fonction racine carrée étant continue en 2, par composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \sqrt{2}.$$

- d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en divisant numérateur et dénominateur par $u_n \neq 0$:

$$r_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n} = \frac{2 + \frac{v_n}{u_n}}{1 + \frac{v_n}{u_n}} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

Vérification : $r_0 = 1$ et $r_1 = \frac{3}{2} = \frac{2+1}{1+1}$.

- e. Le programme part de $r = 1 = r_0$ et $n = 0$; à chaque passage dans la boucle, il remplace

r par le terme suivant grâce à la relation du d. et augmente n de 1 : la variable r contient toujours r_n .

La boucle s'arrête dès que $|r_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-4}$. Donc :

5 est le plus petit entier n tel que $|r_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-4}$: à partir du rang 5 (premier rang atteint), r_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près.

Vérification : $r_4 = \frac{41}{29}$ et $|r_4 - \sqrt{2}| \approx 4,2 \times 10^{-4} > 10^{-4}$;

$r_5 = \frac{99}{70}$ et $|r_5 - \sqrt{2}| \approx 7,2 \times 10^{-5} \leq 10^{-4}$.

Exercice 3

4 points

1) On applique la relation avec $n = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} s_1 &= 0 + \frac{1}{4 \times 1 - 1} = \boxed{\frac{1}{3}} \\ s_2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4 \times 4 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \boxed{\frac{2}{5}} \\ s_3 &= \frac{2}{5} + \frac{1}{4 \times 9 - 1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{35} = \frac{15}{35} = \boxed{\frac{3}{7}} \\ s_4 &= \frac{3}{7} + \frac{1}{4 \times 16 - 1} = \frac{3}{7} + \frac{1}{63} = \frac{28}{63} = \boxed{\frac{4}{9}} \\ s_5 &= \frac{4}{9} + \frac{1}{4 \times 25 - 1} = \frac{4}{9} + \frac{1}{99} = \frac{45}{99} = \boxed{\frac{5}{11}} \end{aligned}$$

2) Le numérateur vaut n et le dénominateur est le nombre impair $2n + 1$. On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \frac{n}{2n + 1}.$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: « $s_n = \frac{n}{2n + 1}$ ».

Initialisation. $\frac{0}{2 \times 0 + 1} = 0 = s_0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On remarque que :

$$4(n + 1)^2 - 1 = (2(n + 1) - 1)(2(n + 1) + 1) = (2n + 1)(2n + 3).$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 s_{n+1} &= s_n + \frac{1}{4(n+1)^2 - 1} \\
 &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\
 &= \frac{n(2n+3) + 1}{(2n+1)(2n+3)} \\
 &= \frac{2n^2 + 3n + 1}{(2n+1)(2n+3)} \\
 &= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \quad (\text{car } (2n+1)(n+1) = 2n^2 + 3n + 1) \\
 &= \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}.
 \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, $s_n = \frac{n}{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

2 points

On utilise le résultat du cours : pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, notons $P(n)$: « $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$ », c'est-à-dire :

$$P(n) : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Initialisation. Pour $n = 1$: $1^3 = 1$ et $1^2 = 1$. $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 && (\text{hypothèse de récurrence}) \\
 &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4(n+1)) && (\text{on factorise par } \frac{(n+1)^2}{4}) \\
 &= \frac{(n+1)^2 (n^2 + 4n + 4)}{4} \\
 &= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2 \\
 &= (1 + 2 + \dots + n + (n+1))^2.
 \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(1)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 \text{ pour tout entier } n \geq 1.$$

Vérification : pour $n = 3$, $1 + 8 + 27 = 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$.