

Calculatrice interdite

Exercice 1

7 points

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

- 1) Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

- 2) a. Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?
b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .
- 3) a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $n \leq u_n \leq n + 1$.
b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .
c. Démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.
- 4) On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.
c. Retrouve-t-on la limite de (u_n) ? Justifier.

Exercice 2

7 points

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) sont **strictement positives**.

- 1) a. Calculer u_1 et v_1 .
b. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n \geq 1$.

- c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq n + 1$.
d. En déduire la limite de la suite (u_n) .

2) On pose, pour tout entier naturel n : $r_n = \frac{v_n}{u_n}$. On admet que : $r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.

- a. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}$.
b. En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.
c. Déterminer la limite de la suite (r_n^2) et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.
d. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}$.
e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
1 from math import sqrt
2 def seuil():
3     n = 0
4     r = 1
5     while abs(r - sqrt(2)) > 10**(-4):
6         r = (2 + r) / (1 + r)
7         n = n + 1
8     return n
```

(abs désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et $10^{**}(-4)$ représente 10^{-4} .)
La valeur de n renvoyée par ce programme est 5. À quoi correspond-elle ?

Exercice 3

4 points

On considère la suite (s_n) définie par $s_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{4(n+1)^2 - 1}.$$

- 1) Déterminer s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 sous forme de fractions irréductibles.
- 2) Émettre une conjecture pour une expression de s_n en fonction de n .
- 3) Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 4

2 points

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)^2.$$