

Exercice 1

6 points

- 1) Comparons $A = \sqrt{3} - 3$ et $B = \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$.

On a $3 < 9$ donc, la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$, $\sqrt{3} < \sqrt{9} = 3$. Ainsi $\sqrt{3} - 3 < 0$: le nombre A est strictement négatif.

Une racine carrée est toujours positive, donc $B \geq 0$ (et $B \neq 0$, car $12 - 6\sqrt{3} \neq 0$ puisque $\sqrt{3} \neq 2$).

Un nombre strictement négatif est inférieur à un nombre positif, d'où

$$\boxed{A < B}.$$

Remarque : $(3 - \sqrt{3})^2 = 9 - 6\sqrt{3} + 3 = 12 - 6\sqrt{3}$ et $3 - \sqrt{3} > 0$, donc $B = 3 - \sqrt{3} = -A$.

- 2) Étudions le signe de $C - D$:

$$\begin{aligned} C - D &= (a + 1)(b + 1) - (ab + 1) \\ &= ab + a + b + 1 - ab - 1 \\ &= a + b. \end{aligned}$$

Or $a < 0$ et $b < 0$, donc $a + b < 0$, c'est-à-dire $C - D < 0$. Ainsi

$$\boxed{C < D}.$$

- 3) On calcule la différence, en remarquant que $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{3}$:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Pour tout entier relatif n , $\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n} > 0$ (une puissance d'un nombre strictement positif est strictement positive). La différence est donc strictement positive et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^n > \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}.$$

- 4) Étudions le signe de $E - F$ (on a $a \neq 0$ et $b \neq 0$) :

$$\begin{aligned} E - 2 &= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \\ &= \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} - \frac{2ab}{ab} \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab} \\ &= \frac{(a - b)^2}{ab}. \end{aligned}$$

Un carré est positif : $(a - b)^2 \geq 0$. Et $ab > 0$, comme produit de deux nombres strictement négatifs. Donc $E - 2 \geq 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{E \geq F},$$

avec égalité si et seulement si $(a - b)^2 = 0$, c'est-à-dire $a = b$.

5) On part de l'encadrement de x :

$$\begin{aligned} -4 \leq x \leq 5 &\iff 12 \geq -3x \geq -15 \quad (\text{on multiplie par } -3 < 0 : \text{l'ordre change}) \\ &\iff -15 \leq -3x \leq 12 \\ &\iff -13 \leq 2 - 3x \leq 14 \quad (\text{on ajoute 2}). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{-13 \leq 2 - 3x \leq 14}.$$

Vérification : pour $x = -4$, $2 - 3x = 14$; pour $x = 5$, $2 - 3x = -13$.

Exercice 2

3 points

On cherche les valeurs qui annulent chaque facteur :

- $2x - 8 = 0 \iff x = 4$; coefficient de x égal à $2 > 0$: $2x - 8$ est négatif puis positif;
- $-x + 1 = 0 \iff x = 1$; coefficient de x égal à $-1 < 0$: $-x + 1$ est positif puis négatif;
- $x + 2 = 0 \iff x = -2$; coefficient de x égal à $1 > 0$: $x + 2$ est négatif puis positif.

Le quotient n'est pas défini pour $x = -2$ et $x = 1$ (dénominateur nul) : ce sont des valeurs interdites (double barre).

x	$-\infty$	-2	1	4	$+\infty$
$2x - 8$	—	—	—	0	+
$-x + 1$	+	+	0	—	—
$x + 2$	—	0	+	+	+
$\frac{2x - 8}{(-x + 1)(x + 2)}$	+	—	+	0	—

Le quotient est négatif ou nul sur $] -2 ; 1[$ et sur $[4 ; +\infty[$ (4 est inclus car le quotient s'y annule; -2 et 1 sont exclus car interdits) :

$$\boxed{S =] -2 ; 1[\cup [4 ; +\infty[}.$$

Vérification : pour $x = 0$, le quotient vaut $\frac{-8}{1 \times 2} = -4 \leq 0$; pour $x = 5$, il vaut $\frac{2}{(-4) \times 7} = -\frac{1}{14} \leq 0$.

Exercice 3

3 points

La production est rentable lorsque le bénéfice est strictement positif. On résout donc $B(x) > 0$ sur $]0; 60[$ à l'aide d'un tableau de signes.

- $-x + 20 = 0 \iff x = 20$; coefficient de x égal à $-1 < 0$: positif puis négatif;
- $x - 50 = 0 \iff x = 50$; coefficient de x égal à $1 > 0$: négatif puis positif.

x	0	20	50	60
$-x + 20$	+	0	-	-
$x - 50$	-	-	0	+
$B(x)$	-	0	+	-

$B(x) > 0 \iff x \in]20; 50[$. La production est rentable lorsque Charlie produit

strictement entre 20 et 50 tonnes de chocolat, soit $x \in]20; 50[$.

Vérification : $B(30) = (-30 + 20)(30 - 50) = (-10) \times (-20) = 200 > 0$, soit un bénéfice de 200 000 €;
 $B(10) = 10 \times (-40) = -400 < 0$.

Exercice 4

2 points

```

1 def Mystere(a, b):
2     for k in range(1, 5):
3         b = a + b
4     return b

```

Au départ, $a = 3$ et $b = 1$.

`range(1, 5)` donne les entiers 1, 2, 3, 4 (la borne 5 est exclue) : la boucle s'exécute donc **4 fois**, et à chaque tour on ajoute $a = 3$ à b .

	départ	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
b	1	$3 + 1 = 4$	$3 + 4 = 7$	$3 + 7 = 10$	$3 + 10 = 13$

La fonction renvoie la dernière valeur de b :

`Mystere(3, 1)` renvoie 13.

Plus généralement, `Mystere(a, b)` renvoie $b + 4a$ (ici $1 + 4 \times 3 = 13$).

Exercice 5

6 points

- 1) a. $g(x) = -2x + 10$ est de la forme $mx + p$ avec $m = -2$ et $p = 10$: g est une fonction affine. Son coefficient directeur $m = -2$ est strictement négatif, donc

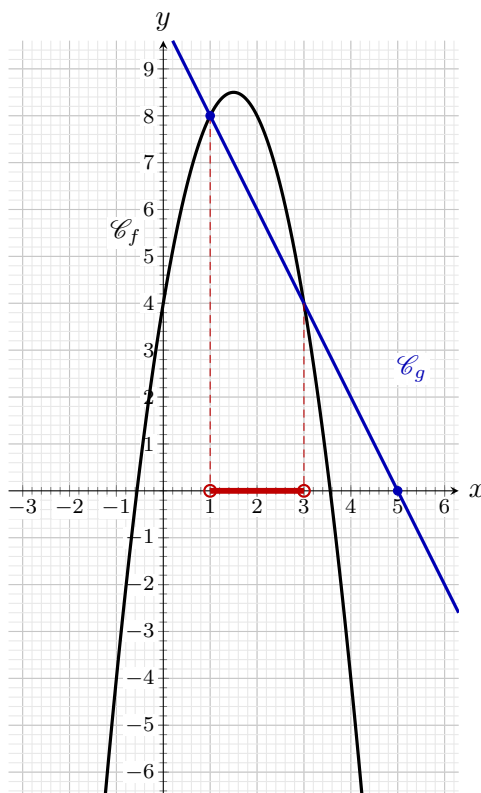
 g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Autre justification : si $x_1 < x_2$, alors $g(x_1) - g(x_2) = -2x_1 + 2x_2 = 2(x_2 - x_1) > 0$, donc $g(x_1) > g(x_2)$.

- b. $\mathcal{C}_g$ est une droite; il suffit de deux points :

x	1	5
$g(x)$	8	0

On trace la droite passant par $(1; 8)$ et $(5; 0)$ (elle coupe l'axe des ordonnées en 10, hors du cadre).



- c. Les courbes se coupent aux points d'abscisses 1 et 3 (on vérifie : $f(1) = g(1) = 8$ et $f(3) = g(3) = 4$). Entre ces deux abscisses, $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}_g$; aux abscisses 1 et 3 les deux courbes se coupent, ces valeurs sont donc exclues (inégalité stricte) :

$S =]1; 3[$.

- 2) a. D'une part,

$$f(x) - g(x) = -2x^2 + 6x + 4 - (-2x + 10) = -2x^2 + 6x + 4 + 2x - 10 = -2x^2 + 8x - 6.$$

D'autre part, en développant,

$$(-2x + 6)(x - 1) = -2x^2 + 2x + 6x - 6 = -2x^2 + 8x - 6.$$

Les deux expressions sont égales, donc pour tout réel x :

$$f(x) - g(x) = (-2x + 6)(x - 1).$$

b. $f(x) > g(x) \iff f(x) - g(x) > 0 \iff (-2x + 6)(x - 1) > 0.$

- $-2x + 6 = 0 \iff x = 3$; coefficient de x égal à $-2 < 0$: positif puis négatif;
- $x - 1 = 0 \iff x = 1$; coefficient de x égal à $1 > 0$: négatif puis positif.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$-2x + 6$	+	+	0	-	
$x - 1$	-	0	+	+	
$f(x) - g(x)$	-	0	+	0	-

L'inéquation $f(x) > g(x)$ a pour ensemble de solutions

$$S =]1; 3[,$$

ce qui confirme la lecture graphique de la question 1) c.

Exercice bonus

1 point

On a $\sqrt{7} > \sqrt{3}$, donc $\sqrt{7} - \sqrt{3} \neq 0$ et C est bien défini. On supprime la racine carrée du dénominateur de C en multipliant par la quantité conjuguée $\sqrt{7} + \sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} C &= \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{7 - 3} \\ &= \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

On reconnaît D :

$$C = D.$$