

## Exercice 1

5 points

- 1) On lit les abscisses des points où  $\mathcal{C}_f$  coupe l'axe des abscisses :  $f(x) = 0$  pour  $x = -5$ ,  $x = 2$  et  $x = 3$ .

La courbe est au-dessus de l'axe des abscisses sur  $] -5 ; 2[$  et sur  $]3 ; 5]$ , en dessous sur  $]2 ; 3[$ .

| $x$             | $-5$ | $2$ | $3$ | $5$ |     |     |
|-----------------|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Signe de $f(x)$ | $0$  | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

- 2) D'après la figure,  $f$  est croissante sur  $[-5 ; -2,5]$ , décroissante sur  $[-2,5 ; 2,5]$ , puis croissante sur  $[2,5 ; 5]$ . L'énoncé donne  $f(-2,5) = 6,2$  et  $f(2,5) = -0,2$ ; on lit  $f(-5) = 0$  et  $f(5) = 6$ .

| $x$               | -5 | -2,5 | 2,5  | 5 |
|-------------------|----|------|------|---|
| Variations de $f$ | 0  | 6,2  | -0,2 | 6 |

- 3) On cherche les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_g$  (en pointillés) avec l'axe des abscisses :

$$S = \{-3 ; 3\}.$$

- 4) On cherche les abscisses des points où  $\mathcal{C}_g$  est strictement en dessous de  $\mathcal{C}_f$ . Les deux courbes se coupent aux points d'abscisses 0 et 3;  $\mathcal{C}_g$  est en dessous de  $\mathcal{C}_f$  à gauche de 0 et à droite de 3 (les bornes 0 et 3 sont exclues car l'inégalité est stricte) :

$$S = [-5 ; 0[ \cup ]3 ; 5].$$

- 5) On trace la droite d'équation  $y = 6$  : elle coupe  $\mathcal{C}_f$  aux points d'abscisses -3, -2 et 5. La courbe  $\mathcal{C}_f$  est strictement au-dessus de cette droite uniquement entre -3 et -2 (en 5,  $f(5) = 6$  n'est pas strictement supérieur à 6) :

$$S = ] -3 ; -2[.$$

## Exercice 2

5 points

- 1) On reconnaît une différence de deux carrés,  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  avec  $a = x - 2$  et  $b = 5$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 2)^2 - 5^2 \\ &= [(x - 2) - 5][(x - 2) + 5] \\ &= (x - 7)(x + 3). \end{aligned}$$

$$f(x) = (x - 7)(x + 3)$$

2) La forme factorisée est la mieux adaptée (équation produit nul) :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff (x - 7)(x + 3) = 0 \\ &\iff x - 7 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 3 = 0 \\ &\iff x = 7 \quad \text{ou} \quad x = -3. \end{aligned}$$

$$S = \{-3; 7\}$$

Vérification :  $f(7) = 5^2 - 25 = 0$  et  $f(-3) = (-5)^2 - 25 = 0$ .

3) On calcule l'image de 0,2 par  $f$  :

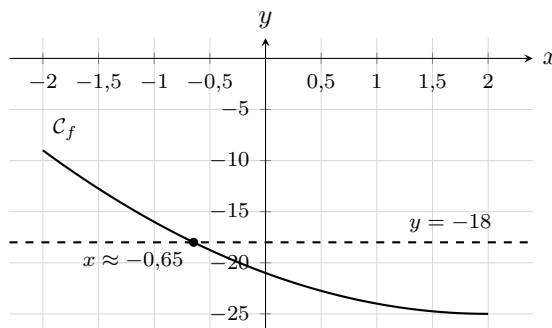
$$f(0,2) = (0,2 - 2)^2 - 25 = (-1,8)^2 - 25 = 3,24 - 25 = -21,76.$$

Comme  $f(0,2) = -21,76 \neq -21,75$ , le point  $A$  n'appartient pas à  $\mathcal{C}_f$ .

4) Avec la table de la calculatrice (par exemple,  $f(-2) = (-4)^2 - 25 = 16 - 25 = -9$ ) :

|        |    |        |     |        |     |        |     |        |     |
|--------|----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|
| $x$    | -2 | -1,5   | -1  | -0,5   | 0   | 0,5    | 1   | 1,5    | 2   |
| $f(x)$ | -9 | -12,75 | -16 | -18,75 | -21 | -22,75 | -24 | -24,75 | -25 |

5) Sur  $[-2; 2]$ , la courbe  $\mathcal{C}_f$  descend de  $-9$  à  $-25$  et ne coupe la droite d'équation  $y = -18$  qu'une seule fois :



L'équation  $f(x) = -18$  semble avoir une seule solution sur  $[-2; 2]$ . D'après le tableau, elle est comprise entre  $-1$  et  $-0,5$  (car  $f(-1) = -16 > -18$  et  $f(-0,5) = -18,75 < -18$ ); en affinant la table, on obtient

$$x \approx -0,65 \quad (\text{à } 0,01 \text{ près}).$$

Vérification par le calcul :  $f(x) = -18 \iff (x - 2)^2 = 7 \iff x = 2 - \sqrt{7}$  ou  $x = 2 + \sqrt{7}$ ; seul  $2 - \sqrt{7} \approx -0,6458$  appartient à  $[-2; 2]$ .

### Exercice 3

3,5 points

- 1) a. 0 et 1 appartiennent à  $[-1; 2]$ , intervalle sur lequel  $f$  est strictement croissante. Or  $0 < 1$ , donc  $f(0) < f(1)$  (une fonction croissante conserve l'ordre).

b.  $-3$  et  $-2$  appartiennent à  $[-4; -1]$ , intervalle sur lequel  $f$  est strictement décroissante. Or  $-3 < -2$ , donc  $f(-3) > f(-2)$  (une fonction décroissante inverse l'ordre).

c.  $0 \in [-1; 2]$  donc  $-2 \leq f(0) \leq 2$ , et  $2,5 \in [2; 3]$  donc  $0 \leq f(2,5) \leq 2$ . Ces deux encadrements se chevauchent : on ne peut pas comparer  $f(0)$  et  $f(2,5)$ .

d.  $-3 \in [-4; -1]$  où  $f$  décroît strictement de  $0$  à  $-2$ ; comme  $-3 > -4$ ,  $f(-3) < f(-4) = 0$ .  
 $3,5 \in [3; 4]$  où  $f$  croît strictement de  $0$  à  $3$ ; comme  $3,5 > 3$ ,  $f(3,5) > f(3) = 0$ .  
Ainsi  $f(-3) < 0 < f(3,5)$ , donc  $f(-3) < f(3,5)$ .

2) Sur  $[-4; 4]$ , les valeurs minimales locales sont  $-2$  (en  $-1$ ) et  $0$  (en  $3$ ) : le minimum de  $f$  sur  $[-4; 4]$  est  $-2$ , atteint en  $x = -1$ .

Sur  $[-4; 2]$ , les valeurs candidates sont  $f(-4) = 0$  et  $f(2) = 2$  : le maximum de  $f$  sur  $[-4; 2]$  est  $2$ , atteint en  $x = 2$ .

## Exercice 4

4 points

1) Pour tout  $x \in [0; 60]$  :

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - f(x) \\ &= 100x - (x^2 + 30x + 1\,000) \\ &= 100x - x^2 - 30x - 1\,000. \end{aligned}$$

$$B(x) = -x^2 + 70x - 1\,000$$

2) a. On développe la forme proposée :

$$\begin{aligned} -(x - 35)^2 + 225 &= -(x^2 - 70x + 1\,225) + 225 \\ &= -x^2 + 70x - 1\,225 + 225 \\ &= -x^2 + 70x - 1\,000. \end{aligned}$$

On retrouve la forme développée de la question 1). Donc, pour tout  $x$  de  $[0; 60]$  :

$$B(x) = -(x - 35)^2 + 225.$$

b.  $B(35) = -(35 - 35)^2 + 225 = -0 + 225$ , donc  $B(35) = 225$ .

Pour tout  $x \in [0; 60]$  :

$$B(x) - B(35) = -(x - 35)^2 + 225 - 225 = -(x - 35)^2.$$

Un carré est positif ou nul :  $(x - 35)^2 \geq 0$ , donc  $-(x - 35)^2 \leq 0$ . Ainsi

$$B(x) - B(35) \leq 0 \quad \text{pour tout } x \in [0; 60].$$

c. D'après b.,  $B(x) \leq B(35)$  pour tout  $x \in [0; 60]$  (et  $35 \in [0; 60]$ ) :  $B(35)$  est le maximum de  $B$ .

Le bénéfice est maximal pour  $x = 35$  tonnes, et il vaut  $B(35) = 225$  milliers d'euros, soit

225 000 €.

## Exercice 5

2,5 points

- 1) On exécute les instructions avec  $c = 10$  et  $k = 2$  :

| Instruction | A   | c  | B   | D  |
|-------------|-----|----|-----|----|
| $A = c * c$ | 100 | 10 |     |    |
| $c = c + k$ | 100 | 12 |     |    |
| $B = c * c$ | 100 | 12 | 144 |    |
| $D = B - A$ | 100 | 12 | 144 | 44 |

À la fin de l'exécution, la variable D contient 44.

- 2) A contient l'aire  $c^2$  du carré initial (hachuré), B l'aire  $(c+k)^2$  du carré agrandi. Donc  $D = (c+k)^2 - c^2$  est l'aire de la partie ajoutée :

D est l'aire (en  $\text{cm}^2$ ) de la partie non hachurée de la figure .

En développant :  $(c + k)^2 - c^2 = 2ck + k^2$  (deux rectangles  $c \times k$  et un petit carré  $k \times k$ ). Avec  $c = 10$  et  $k = 2$  :  $2 \times 10 \times 2 + 2^2 = 44$ , ce qui confirme la question 1).