

Exercice 1

6 points

- 1) Un crochet tourné vers le nombre signifie que la borne est comprise (inégalité large $\leq$ ou $\geq$); un crochet tourné vers l'extérieur, qu'elle est exclue (inégalité stricte). Du côté de $\pm\infty$, le crochet est toujours ouvert.

Intervalle	Inégalité(s)
$x \in]-\infty; 5[$	$x < 5$
$x \in [-10; 67]$	$-10 \leq x \leq 67$
$x \in]34,75; +\infty[$	$x > 34,75$
$x \in [-4; 5,5[$	$-4 \leq x < 5,5$
$x \in]-\infty; 0,75]$	$x \leq 0,75$
$x \in]6,78; +\infty[$	$x > 6,78$

- 2) L'intersection $I \cap J$ contient les nombres qui sont à la fois dans I et dans J ; la réunion $I \cup J$, ceux qui sont dans I ou dans J . Une droite graduée aide à conclure.

- a. Les nombres x vérifient $x \leq 13$ et $5,6 \leq x < 123$, c'est-à-dire $5,6 \leq x \leq 13$:

$$]-\infty; 13] \cap [5,6; 123[= [5,6; 13].$$

- b. Il faudrait $x < 4,56$ et $x > 4,56$ en même temps : c'est impossible. Les deux intervalles n'ont aucun nombre en commun :

$$[-123; 4,56[\cap]4,56; 12[= \emptyset.$$

L'intersection est l'ensemble vide (aucun nombre, donc pas de bornes).

- c. On compare les bornes : $\sqrt{3} \approx 1,732$ et $\frac{11}{6} \approx 1,833$, donc $-15,67 < -\sqrt{3} < \sqrt{3} < \frac{11}{6}$.

Les deux intervalles se chevauchent (sur $]-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$) : leur réunion va de la plus petite borne gauche à la plus grande borne droite.

$$[-15,67; \sqrt{3}] \cup]-\sqrt{3}; \frac{11}{6}[= \left[-15,67; \frac{11}{6}\right[.$$

Pour $\sqrt{3} < \frac{11}{6}$ sans calculatrice : $\left(\frac{11}{6}\right)^2 = \frac{121}{36} > 3$ car $3 = \frac{108}{36}$, et les deux nombres sont positifs.

- d. Le nombre 9,5 n'appartient à aucun des deux intervalles (il est exclu des deux côtés) alors que des nombres juste avant et juste après lui y appartiennent. La réunion présente donc un « trou » en 9,5 : ce n'est pas possible.

On peut seulement écrire $[-10,2; 9,5[\cup]9,5; 10,24] = [-10,2; 10,24] \setminus \{9,5\}$.

Exercice 2

5 points

Nombre C. Décompositions : $288 = 2^5 \times 3^2 = 2^4 \times 3^2 \times 2$, $162 = 2 \times 3^4$, $98 = 2 \times 7^2$. Donc

$$\sqrt{288} = \sqrt{2^4 \times 3^2} \times \sqrt{2} = 4 \times 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}, \quad \sqrt{162} = \sqrt{3^4} \times \sqrt{2} = 9\sqrt{2}, \quad \sqrt{98} = 7\sqrt{2}.$$

$$C = \frac{12\sqrt{2} + 9\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{21\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{21}{7}, \quad \text{soit } \boxed{C = 3}.$$

Nombre D. Décompositions : $96 = 2^5 \times 3$, $50 = 2 \times 5^2$, $147 = 3 \times 7^2$. Donc

$$\sqrt{96} \times \sqrt{50} = \sqrt{2^5 \times 3 \times 2 \times 5^2} = \sqrt{2^6 \times 5^2 \times 3} = 2^3 \times 5 \times \sqrt{3} = 40\sqrt{3}, \quad \sqrt{147} = 7\sqrt{3}.$$

$$D = \frac{40\sqrt{3}}{7\sqrt{3}}, \quad \text{soit } \boxed{D = \frac{40}{7}}.$$

Nombre E. Décompositions : $1\,134 = 2 \times 3^4 \times 7$ et $1\,701 = 3^5 \times 7$. On simplifie par $3^4 \times 7 = 567$:

$$E = \frac{2 \times 3^4 \times 7}{3 \times 3^4 \times 7}, \quad \text{soit } \boxed{E = \frac{2}{3}}.$$

Vérification : $567 \times 2 = 1\,134$ et $567 \times 3 = 1\,701$. La fraction $\frac{2}{3}$ est irréductible.

Exercice 3

5 points

1) On utilise $(a^m)^n = a^{m \times n}$ et $a^m \times a^n = a^{m+n}$, après avoir écrit $9 = 3^2$:

$$F = \left((3^2)^2\right)^5 \times 3^{(-2) \times (-5)} = 3^{2 \times 2 \times 5} \times 3^{10} = 3^{20} \times 3^{10}, \quad \text{soit } \boxed{F = 3^{30}}.$$

On utilise $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ pour chaque facteur premier :

$$G = \frac{2^2}{2} \times \frac{3^4}{3^2} \times \frac{7^3}{5^3} = 2 \times 3^2 \times \frac{7^3}{5^3}, \quad \text{soit } \boxed{G = \frac{2 \times 3^2 \times 7^3}{5^3} = \frac{6\,174}{125}}.$$

(La fraction est irréductible : $6\,174 = 2 \times 3^2 \times 7^3$ ne contient pas le facteur 5.)

2) On développe, puis on regroupe les termes en $\sqrt{7}$:

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{7} - 15 - 5\sqrt{7} + 4\sqrt{7} \\ &= -15 + (2 - 5 + 4)\sqrt{7}, \end{aligned} \quad \text{soit } \boxed{A = -15 + \sqrt{7}}.$$

On distribue $\sqrt{5}$ et on utilise $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$:

$$B = 2\sqrt{5} - 3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 3 \times 5, \quad \text{soit } \boxed{B = 2\sqrt{5} - 15}.$$

Exercice 4

4 points

1) $(a+1) \times (a+1) = a \times a + a \times 1 + 1 \times a + 1 \times 1$, soit

$$(a+1) \times (a+1) = a^2 + 2a + 1.$$

2) Notons $N = \left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}\right) \times \left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}\right)$, bien défini car $a > 0$.

Comme $a > 0$, $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, donc, en réduisant au même dénominateur :

$$\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a} \times \sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}} = \frac{a+1}{\sqrt{a}}.$$

D'où, avec la question 1) et $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$:

$$N = \frac{a+1}{\sqrt{a}} \times \frac{a+1}{\sqrt{a}} = \frac{(a+1) \times (a+1)}{a} = \frac{a^2 + 2a + 1}{a} = a + 2 + \frac{1}{a}.$$

Or a est un rationnel non nul, donc $\frac{1}{a}$ est rationnel; et une somme de rationnels est un rationnel. Ainsi

$$N = a + 2 + \frac{1}{a} \text{ est un nombre rationnel } (N \in \mathbb{Q}).$$

Autre méthode : en développant directement, avec $\sqrt{a} \times \sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{a \times \frac{1}{a}} = \sqrt{1} = 1$:

$$N = \sqrt{a} \times \sqrt{a} + 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{\frac{1}{a}} + \sqrt{\frac{1}{a}} \times \sqrt{\frac{1}{a}} = a + 2 + \frac{1}{a}.$$

Vérification avec $a = 2$: $\left(\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{9}{2}$, et $2 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

Remarque : N n'est pas forcément décimal (pour $a = 3$, $N = 5 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3}$), ni forcément entier; c'est en général un rationnel.