

Exercice 1

4 points

1) Rappel : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

- $361 = 19 \times 19$, donc $-\frac{19}{361} = -\frac{19}{19 \times 19}$, soit $-\frac{19}{361} = -\frac{1}{19} \in \mathbb{Q}$.

Ce n'est pas un décimal : 19 n'est pas de la forme $2^a \times 5^b$ (et $-\frac{1}{19} \approx -0,052\,631\,578\dots$ ne s'arrête pas).

- $\sqrt{49} - 2 = 7 - 2$, soit $\sqrt{49} - 2 = 5 \in \mathbb{N}$.

- $\frac{\pi + 3}{3\pi} = \frac{\pi}{3\pi} + \frac{3}{3\pi} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi}$.

Si ce nombre était rationnel, $\frac{1}{\pi}$ le serait aussi (différence de deux rationnels), donc π aussi :

c'est faux, car π est irrationnel. Ainsi $\frac{\pi + 3}{3\pi} \in \mathbb{R}$ (il n'appartient pas à $\mathbb{Q}$).

- $\frac{\sqrt{7}}{5} \times \frac{\sqrt{7}}{5} = \frac{(\sqrt{7})^2}{25} = \frac{7}{25} = \frac{28}{100}$, soit $\frac{\sqrt{7}}{5} \times \frac{\sqrt{7}}{5} = 0,28 \in \mathbb{D}$.

- $3,3131 = \frac{33\,131}{10^4}$ s'écrit avec un nombre fini de décimales (ce n'est pas $3,3131\dots$ périodique) : $3,3131 \in \mathbb{D}$.

- Attention, la puissance est prioritaire sur le signe : $-3^2 = -(3 \times 3)$, soit $-3^2 = -9 \in \mathbb{Z}$ (entier négatif, donc pas dans $\mathbb{N}$).

- $14^8 = (2 \times 7)^8 = 2^8 \times 7^8$, donc

$$\frac{2^8}{14^8} = \frac{2^8}{2^8 \times 7^8} = \frac{1}{7^8}, \text{ soit } \frac{2^8}{14^8} = \frac{1}{5\,764\,801} \in \mathbb{Q}.$$

Ce n'est pas un décimal : le dénominateur 7^8 n'a pas d'autre facteur premier que 7.

- $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$, soit $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$; ce n'est pas un décimal ($\frac{5}{3} = 1,666\dots$, le dénominateur 3 n'est pas de la forme $2^a \times 5^b$).

2) $\frac{3}{2} = 1,5$ et $\frac{5}{3} \approx 1,667$.

Le nombre $\frac{\pi}{2}$ est irrationnel (sinon $\pi = 2 \times \frac{\pi}{2}$ serait rationnel) et $\frac{\pi}{2} \approx 1,571$. Donc

$$\frac{3}{2} < \frac{\pi}{2} < \frac{5}{3}.$$

Autre réponse possible : $\sqrt{2,5} \approx 1,581$ convient aussi, car $1,5^2 = 2,25 < 2,5 < \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \approx 2,78$.

Exercice 2

4 points

Affirmation	Réponse	Justification
$-15 \notin]-5; 0[$	V	$-15 < -5$
$-4 \in]-\infty; -4[$	F	le crochet est ouvert en -4
$10^{-7} \notin]-\infty; 0[$	V	$10^{-7} = 0,000\,000\,1 > 0$
$\frac{1}{3} \notin [0; 0,33]$	V	$\frac{1}{3} = 0,333\ldots > 0,33$
$-3,14 \in]-5; -\pi]$	F	$-\pi \approx -3,1416 < -3,14$: $-3,14$ est à droite de $-\pi$
$] -\infty; -2] \cup]-2; 7[=] -\infty; 7[$	F	la réunion vaut $] -\infty; 7[$ (7 est exclu)
$] -\infty; 2[\cap]-1; 15[=]-1; 2[$	F	l'intersection vaut $] -1; 2[$ (2 est exclu)
$] -\infty; -2] \cap]-2; 7[= \{-2\}$	F	$-2 \notin]-2; 7[$: l'intersection est vide, $\emptyset$

Exercice 3

2 points

Intervalle	Ensemble des réels x tels que
$x \in]-5; 7]$	$-5 < x \leq 7$
$x \in]-\infty; 2[$	$x < 2$
$x \in]10; +\infty[$	$x > 10$
$x \in]-6; 0]$	x strictement supérieur à -6 et négatif ou nul

Pour la dernière ligne : « strictement supérieur à -6 » donne $x > -6$ (crochet ouvert en -6) et « négatif ou nul » donne $x \leq 0$ (crochet fermé en 0); c'est aussi $] -6; +\infty[\cap] -\infty; 0]$.

Exercice 4

2 points

Un encadrement d'amplitude 10^{-3} est de la forme $a < x < a + 0,001$, avec a écrit avec trois décimales.

1) À la calculatrice, $\sqrt{11} \approx 3,316\,62\ldots$. Donc

$$3,316 < \sqrt{11} < 3,317 \quad \text{et} \quad \sqrt{11} \approx 3,317$$

au millième près (la quatrième décimale vaut $6 \geq 5$, on arrondit au millième supérieur).

2) $-\frac{11}{3} = -3,666\ 6\dots$ Donc

$$\boxed{-3,667 < -\frac{11}{3} < -3,666} \quad \text{et} \quad \boxed{-\frac{11}{3} \approx -3,667}$$

au millième près : $-\frac{11}{3}$ est plus proche de $-3,667$ (écart $0,000\ 33\dots$) que de $-3,666$ (écart $0,000\ 66\dots$).

Exercice 5

2 points

On a $c = 300\ 000\ 000 = 3 \times 10^8$ m/s. De $\lambda \times f = c$, on tire $\lambda = \frac{c}{f}$:

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{7,5 \times 10^{14}} = \frac{3}{7,5} \times 10^{8-14} = 0,4 \times 10^{-6} = 4 \times 10^{-1} \times 10^{-6}.$$

La longueur d'onde de la lumière violette est donc

$$\boxed{\lambda = 4 \times 10^{-7} \text{ m}} \quad (\text{soit } 0,000\ 000\ 4 \text{ m, ou encore } 400 \text{ nm}).$$

Vérification : $4 \times 10^{-7} \times 7,5 \times 10^{14} = 30 \times 10^7 = 3 \times 10^8$.

Exercice 6

4 points

Rappel : $|x - a|$ est la distance entre x et a sur la droite des réels.

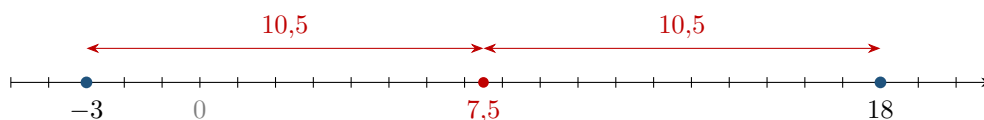
1) $|x - 7,5| = 10,5$: la distance entre x et $7,5$ vaut $10,5$.

$$\begin{aligned} |x - 7,5| = 10,5 &\iff x - 7,5 = 10,5 \quad \text{ou} \quad x - 7,5 = -10,5 \\ &\iff x = 18 \quad \text{ou} \quad x = -3 \end{aligned} \quad (\text{on ajoute } 7,5)$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-3; 18\}}$$

Vérification : $|18 - 7,5| = 10,5$ et $|-3 - 7,5| = |-10,5| = 10,5$.

Graphiquement : on place $7,5$ sur une droite graduée ; les solutions sont les deux réels situés à la distance $10,5$ de $7,5$, de part et d'autre : $7,5 - 10,5 = -3$ et $7,5 + 10,5 = 18$.

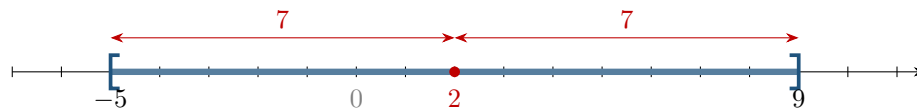


2) $|x - 2| \leq 7$: la distance entre x et 2 est inférieure ou égale à 7 .

$$\begin{aligned} |x - 2| \leq 7 &\iff -7 \leq x - 2 \leq 7 \\ &\iff -5 \leq x \leq 9 \end{aligned} \quad (\text{on ajoute } 2)$$

$$\mathcal{S} = [-5; 9]$$

Graphiquement : les solutions sont les réels situés à une distance au plus 7 de 2, c'est-à-dire entre $2 - 7 = -5$ et $2 + 7 = 9$, bornes comprises.

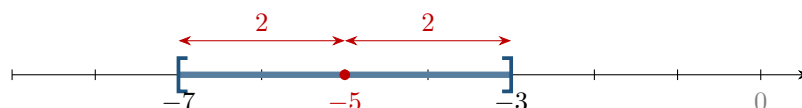


3) $|x + 5| \leq 2$, c'est-à-dire $|x - (-5)| \leq 2$: la distance entre x et -5 est inférieure ou égale à 2.

$$\begin{aligned} |x + 5| \leq 2 &\iff -2 \leq x + 5 \leq 2 \\ &\iff -7 \leq x \leq -3 \quad (\text{on retranche } 5) \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = [-7; -3]$$

Graphiquement : les solutions sont les réels situés à une distance au plus 2 de -5 , entre $-5 - 2 = -7$ et $-5 + 2 = -3$, bornes comprises.



Exercice 7

2 points

La distance entre deux réels a et b est $d(a; b) = |a - b|$.

1) $d(-7; -18) = |-7 - (-18)| = |-7 + 18| = |11|$, soit $d(-7; -18) = 11$.

2) $d(-5\sqrt{2}; 9\sqrt{2}) = |-5\sqrt{2} - 9\sqrt{2}| = |-14\sqrt{2}|$, soit $d(-5\sqrt{2}; 9\sqrt{2}) = 14\sqrt{2}$ (environ 19,80).