

Exercice 1

2 points

On cherche les produits de deux entiers positifs égaux à 36, en testant les entiers de 1 à 6 (car $6 \times 6 = 36$) :

$$36 = 1 \times 36 \quad 36 = 2 \times 18 \quad 36 = 3 \times 12 \quad 36 = 4 \times 9 \quad 36 = 6 \times 6$$

(5 ne divise pas 36, puisque $36 = 5 \times 7 + 1$.)

Les diviseurs positifs de 36 sont :

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

soit 9 diviseurs.

Exercice 2

3 points

1) **Faux.** Un contre-exemple suffit : $n = 16$ est divisible par 8 ($16 = 8 \times 2$), mais

$$\frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 0,5$$

n'est pas un entier. L'affirmation est

fausse

.

Remarque : $\frac{8}{n}$ est un entier lorsque n divise 8, ce qui n'est pas la même chose que « n divisible par 8 » (8 divise n).

2) **Vrai.** Si n est divisible par 8, il existe un entier k tel que $n = 8k$. Alors

$$n = 8k = 4 \times (2k),$$

et $2k$ est un entier. Donc n est un multiple de 4 : l'affirmation est

vraie

.

3) **Faux.** Contre-exemple : 3 et 5 sont premiers, mais

$$3 + 5 = 8 = 2 \times 4$$

n'est pas premier (il est divisible par 2). L'affirmation est

fausse

.

Remarque : la somme de deux nombres premiers impairs est toujours paire et supérieure à 2, donc jamais première.

Exercice 3

4 points

- 1) On divise successivement par les nombres premiers dans l'ordre croissant.

3 388	2	840	2
1 694	2	420	2
847	7	210	2
121	11	105	3
11	11	35	5
1		7	7
		1	

(847 n'est divisible ni par 2, ni par 3 car $8 + 4 + 7 = 19$, ni par 5; en revanche $847 = 7 \times 121$.)

Donc :

$$3\,388 = 2^2 \times 7 \times 11^2 \quad 840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$$

Vérification : $4 \times 7 \times 121 = 28 \times 121 = 3\,388$ et $8 \times 3 \times 5 \times 7 = 840$.

- 2) On simplifie par les facteurs premiers communs, 2^2 et 7 (soit par 28) :

$$\frac{3\,388}{840} = \frac{2^2 \times 7 \times 11^2}{2^2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{11^2}{2 \times 3 \times 5} = \frac{121}{30}$$

Cette fraction est irréductible : $121 = 11^2$ et $30 = 2 \times 3 \times 5$ n'ont aucun facteur premier commun.

Exercice 4

3 points

Méthode. Pour savoir si un entier $N \geq 2$ est premier, il suffit de tester sa divisibilité par les nombres premiers p tels que $p^2 \leq N$: si aucun ne le divise, N est premier.

- 1 287. La somme de ses chiffres est $1 + 2 + 8 + 7 = 18$, multiple de 3 : donc 1 287 est divisible par 3.

$$1\,287 = 3 \times 429 = 3^2 \times 11 \times 13$$

1 287 admet d'autres diviseurs que 1 et lui-même : 1 287 n'est pas premier.

- 289. On a $289 = 17 \times 17 = 17^2$.
17 est un diviseur de 289 différent de 1 et de 289 : 289 n'est pas premier.
- 239. Comme $15^2 = 225 \leq 239 < 256 = 16^2$, il suffit de tester les nombres premiers inférieurs ou égaux à 15 : 2, 3, 5, 7, 11 et 13.
 - 239 est impair : il n'est pas divisible par 2;
 - $2 + 3 + 9 = 14$ n'est pas un multiple de 3 : il n'est pas divisible par 3;
 - il ne se termine ni par 0 ni par 5 : il n'est pas divisible par 5;
 - $239 = 7 \times 34 + 1$, $239 = 11 \times 21 + 8$, $239 = 13 \times 18 + 5$: restes non nuls.

Aucun de ces nombres premiers ne divise 239, donc 239 est premier.

Exercice 5

4 points

- 1) Soient a et b deux multiples de 5 : il existe deux entiers k et k' tels que $a = 5k$ et $b = 5k'$. Alors

$$a + b = 5k + 5k' = 5(k + k').$$

Comme $k + k'$ est un entier, $a + b$ est un multiple de 5.

- 2) Trois entiers consécutifs s'écrivent n , $n + 1$ et $n + 2$, avec n entier. Leur somme vaut

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1).$$

Comme $n + 1$ est un entier, cette somme est un multiple de 3 : elle est divisible par 3.

- 3) Soit n un entier impair : il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Alors

$$\begin{aligned} n^2 + 2n + 5 &= (2k + 1)^2 + 2(2k + 1) + 5 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 4k + 2 + 5 \\ &= 4k^2 + 8k + 8 \\ &= 4(k^2 + 2k + 2). \end{aligned}$$

Comme $k^2 + 2k + 2$ est un entier, $n^2 + 2n + 5$ est un multiple de 4 : 4 divise $n^2 + 2n + 5$.

Vérification : pour $n = 1$, $1 + 2 + 5 = 8 = 4 \times 2$; pour $n = 3$, $9 + 6 + 5 = 20 = 4 \times 5$.

Exercice 6

4 points

L'implication étudiée est : « Si n^2 est pair, alors n est pair », pour n entier.

Rappel : la contraposée de « si P , alors Q » est « si non Q , alors non P »; elle est vraie exactement quand l'implication est vraie. La réciproque est « si Q , alors P »; elle peut être vraie ou fausse indépendamment de l'implication.

- 1) a. La négation de « n est pair » est « n est impair » (pour un entier). La contraposée est donc :

« Si n est impair, alors n^2 est impair. »

- b. Soit n un entier impair : il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Alors

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Comme $2k^2 + 2k$ est un entier, n^2 est de la forme $2m + 1$ avec m entier : n^2 est impair.

La contraposée est vraie; par conséquent l'implication de départ « si n^2 est pair, alors n est pair » est vraie elle aussi.

- 2) a. La réciproque échange l'hypothèse et la conclusion :

« Si n est pair, alors n^2 est pair. »

b. Soit n un entier pair : il existe un entier k tel que $n = 2k$. Alors

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2).$$

Comme $2k^2$ est un entier, n^2 est pair. La réciproque est donc vraie.

Conclusion : l'implication et sa réciproque étant vraies, on a l'équivalence « n^2 est pair $\iff$ n est pair ».

Bonus

hors barème

Résultat. Les entiers naturels qui ont exactement trois diviseurs positifs sont les **carrés des nombres premiers** :

$$n = p^2 \text{ avec } p \text{ premier}$$

par exemple 4, 9, 25, 49, 121, 169...

Justification.

- *Les carrés de nombres premiers conviennent.* Si p est premier, les diviseurs positifs de p^2 sont 1, p et p^2 , et seulement eux (un diviseur de p^2 ne peut contenir que le facteur premier p) : il y en a exactement trois.
- *Ce sont les seuls.* Les diviseurs positifs d'un entier n vont par paires : d et $\frac{n}{d}$. Deux diviseurs d'une paire sont distincts, sauf si $d = \frac{n}{d}$, c'est-à-dire $n = d^2$.
Si n a un nombre impair de diviseurs (ici trois), une paire est donc réduite à un seul diviseur : n est un carré, $n = m^2$ avec $m \geq 2$ (car 1 n'a qu'un diviseur).
Les trois diviseurs de n sont alors 1, m et m^2 . Si m avait un diviseur d avec $1 < d < m$, ce d diviserait aussi n et serait un quatrième diviseur : impossible. Donc m n'a pas d'autre diviseur que 1 et lui-même : m est premier.