

Exercice 1

16 points

1) On rappelle que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

- $\frac{7}{25} = \frac{28}{100} = 0,28$, donc $\frac{7}{25} \in \mathbb{D}$ (et ce n'est pas un entier).
- $10^5 = 100\,000$ est un entier positif, donc $10^5 \in \mathbb{N}$.
- $-14,6 = -\frac{146}{10}$ n'est pas un entier, donc $-14,6 \in \mathbb{D}$.
- $-\frac{159}{3} = -53$ est un entier négatif, donc $-\frac{159}{3} \in \mathbb{Z}$.
- $\sqrt{\pi}$ est irrationnel, donc $\sqrt{\pi} \in \mathbb{R}$.
- $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}$: c'est un quotient d'entiers, mais il n'est pas décimal (7 ne divise aucune puissance de 10), donc $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} \in \mathbb{Q}$.

2) a. On effectue la division euclidienne : $208 = 13 \times 16$, avec 16 entier.

Donc 208 est un multiple de 13.

b. 13 est un diviseur de 208.

208 est divisible par 13.

208 a pour diviseur 13.

13 a pour multiple 208.

3) a. Un nombre est **décimal** s'il peut s'écrire sous la forme $\frac{n}{10^p}$, avec n entier relatif et p entier naturel (autrement dit, s'il s'écrit avec un nombre **fini** de chiffres après la virgule). Ici :

$$a = \frac{5}{4} = \frac{5 \times 25}{4 \times 25} = \frac{125}{100} = \frac{125}{10^2} = 1,25.$$

Donc a est un nombre décimal.

b. $b = \frac{4}{3}$ est le quotient de deux entiers, donc b est **rationnel**.

Supposons que b soit décimal : il existerait un entier n et un entier naturel p tels que $\frac{4}{3} = \frac{n}{10^p}$, c'est-à-dire $4 \times 10^p = 3n$. Alors 3 diviserait $4 \times 10^p = 2^{p+2} \times 5^p$, ce qui est impossible car 3 n'apparaît pas dans cette décomposition en facteurs premiers.

Donc b est un rationnel non décimal.

Remarque : la division posée donne $4 \div 3 = 1,333\dots$, le reste 1 revient à chaque étape et le chiffre 3 se répète indéfiniment.

c. On réduit au même dénominateur 12 :

$$a = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{15}{12} \quad \text{et} \quad b = \frac{4 \times 4}{3 \times 4} = \frac{16}{12}.$$

Comme $15 < 16$, on a $\frac{15}{12} < \frac{16}{12}$, donc $a < b$.

d. On a $a = 1,25$ et $b = 1,333 \dots$. Par exemple $\boxed{1,3}$ convient :

$$1,25 < 1,3 < 1,333 \dots \quad \text{soit} \quad a < 1,3 < b.$$

Vérification : $1,3 = \frac{13}{10} = \frac{39}{30}$ et $b = \frac{40}{30}$, donc $1,3 < b$; et $1,3 = \frac{13}{10}$ est bien décimal.

4) a. À la calculatrice, $\sqrt{11} \approx 3,316\,62$. Donc

$$\boxed{3,316 < \sqrt{11} < 3,317}.$$

Vérification : $3,316^2 = 10,995\,856 < 11$ et $3,317^2 = 11,002\,489 > 11$.

b. À la calculatrice, $\frac{\sqrt{3}+1}{2} \approx 1,366\,025\,4$. Donc

$$\boxed{1,366\,02 < \frac{\sqrt{3}+1}{2} < 1,366\,03}.$$

5) a. $a = 10k = 2 \times (5k)$, et $5k$ est un entier relatif car k en est un.

Donc $\boxed{a \text{ est un multiple de } 2}$.

b. $b = 6k = 3 \times (2k)$, et $2k$ est un entier relatif.

Donc $\boxed{b \text{ est un multiple de } 3}$.

c. $a + b = 10k + 6k = 16k = 8 \times (2k)$, et $2k$ est un entier relatif.

Donc $a + b$ est un multiple de 8 : $\boxed{8 \text{ est un diviseur de } a + b}$.

6) Notons L et ℓ les longueurs des côtés, en mètres : ce sont des entiers naturels tels que $L \times \ell = 50$. Ce sont donc des diviseurs de 50, associés deux à deux :

$$50 = 1 \times 50 = 2 \times 25 = 5 \times 10.$$

(On peut s'arrêter là car $\sqrt{50} \approx 7,07$: au-delà, on retrouve les mêmes produits.)

Les côtés possibles sont donc $\boxed{1 \text{ m et } 50 \text{ m} \quad ; \quad 2 \text{ m et } 25 \text{ m} \quad ; \quad 5 \text{ m et } 10 \text{ m}}$.

7) On divise successivement par les nombres premiers :

$$\begin{array}{r|l} 13\,650 & 2 \\ 6\,825 & 3 \\ 2\,275 & 5 \\ 455 & 5 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Donc $\boxed{13\,650 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 13}$.

Vérification : $2 \times 3 \times 25 \times 7 \times 13 = 150 \times 91 = 13\,650$.

Exercice 2

4 points

On traduit chaque étape du programme par une instruction : les deux nombres choisis sont les arguments x et y de la fonction, et le résultat affiché est la valeur renvoyée.

```
1 def programme(x, y):  
2     a = x + 2          # on ajoute 2 au premier  
3     b = 3 * y          # on multiplie le second par 3  
4     resultat = a * b   # on multiplie les deux résultats  
5     return resultat
```

Autrement dit, la fonction renvoie $(x + 2) \times 3y$.

Vérification en exécutant le programme : `programme(1, 2)` renvoie 18, car $(1+2) \times (3 \times 2) = 3 \times 6 = 18$;
`programme(4, -1)` renvoie -18, car $(4+2) \times (3 \times (-1)) = 6 \times (-3) = -18$.

Remarque : pour « afficher » le résultat, on peut écrire `print(programme(1, 2))`, ou remplacer la dernière ligne par `print(resultat)`.