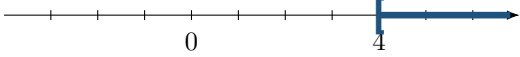
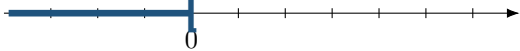


Exercice 1

3,5 points

- 1) On traduit chaque inégalité par un intervalle : le crochet est *tourné vers le nombre* quand celui-ci est inclus (inégalité large), *tourné vers l'extérieur* quand il est exclu (inégalité stricte); du côté de $\pm\infty$ le crochet est toujours ouvert.

Inégalité	Schéma	Intervalle
$-2 < x \leq 5$		$] -2 ; 5]$
$x \geq 4$		$[4 ; +\infty [$
$x < 0$		$] -\infty ; 0 [$

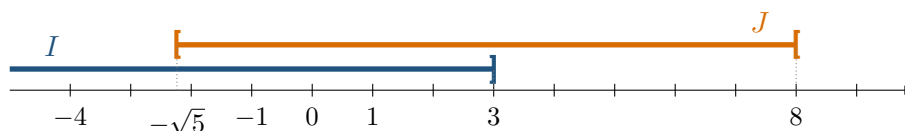
Pour $x < 0$, le nombre 0 est exclu : le crochet en 0 est ouvert.

- 2) $I =]-\infty ; 3]$ et $J = [-\sqrt{5} ; 8[$, avec $-\sqrt{5} \approx -2,24$.

- a. Dire que x appartient à $I =]-\infty ; 3]$, c'est dire que

$$x \leq 3.$$

- b. On représente les deux intervalles sur une même droite graduée :



La réunion $I \cup J$ contient les réels qui sont dans I ou dans J : on prend tout ce qui est colorié, au moins une fois. Les deux intervalles se chevauchent (entre $-\sqrt{5}$ et 3), donc la réunion part de $-\infty$ et va jusqu'à 8, exclu car $8 \notin J$ et $8 \notin I$:

$$I \cup J =]-\infty ; 8[$$

- c. L'intersection $I \cap J$ contient les réels qui sont à la fois dans I et dans J (partie coloriée deux fois) :

$$I \cap J = [-\sqrt{5} ; 3].$$

Or $-\sqrt{5} \approx -2,24$, donc $-\sqrt{5} \leq -1 \leq 3$. (Sans calculatrice : $1 < 5$ donne $1 < \sqrt{5}$, donc $-\sqrt{5} < -1$.)

Ainsi $-1 \in I \cap J$: en effet $-1 \leq 3$ donc $-1 \in I$, et $-\sqrt{5} \leq -1 < 8$ donc $-1 \in J$.

Exercice 2

2 points

Notons n le nombre de départ et q le quotient de la division euclidienne de n par 7.

On rappelle que dans la division euclidienne de a par b , on a $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$.

- Première division : n divisé par 7 donne le quotient q et le reste 3 (bien inférieur à 7), donc

$$n = 7q + 3.$$

- Deuxième division : q divisé par 7 donne le quotient 11 et le reste 5, donc

$$q = 7 \times 11 + 5 = 77 + 5 = 82.$$

On en déduit $n = 7 \times 82 + 3 = 574 + 3$, soit

$$n = 577.$$

Vérification : $577 = 7 \times 82 + 3$ et $82 = 7 \times 11 + 5$.

Exercice 3

3,5 points

- 1) Pour savoir si 71 est premier, il suffit de tester sa divisibilité par les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{71} \approx 8,43$, c'est-à-dire 2, 3, 5 et 7 :

- 71 est impair, donc il n'est pas divisible par 2;
- la somme de ses chiffres vaut $7 + 1 = 8$, qui n'est pas multiple de 3, donc 71 n'est pas divisible par 3;
- 71 ne se termine ni par 0 ni par 5, donc il n'est pas divisible par 5;
- $71 = 7 \times 10 + 1$, donc il n'est pas divisible par 7.

Aucun de ces nombres premiers ne divise 71 : 71 est un nombre premier.

- 2) On cherche les produits de deux entiers égaux au nombre, en s'arrêtant à sa racine carrée :

- $12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$, donc les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12.
- $16 = 1 \times 16 = 2 \times 8 = 4 \times 4$, donc les diviseurs de 16 sont 1, 2, 4, 8, 16.

- 3) a. Somme des diviseurs de 12 autres que 12 : $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$. Elle vaut bien 16.

Somme des diviseurs de 16 autres que 16 : $1 + 2 + 4 + 8 = 15$. Elle ne vaut pas 12.

La seconde condition n'est pas remplie : 12 et 16 ne sont pas amicaux.

- b. Diviseurs de 220 : $220 = 1 \times 220 = 2 \times 110 = 4 \times 55 = 5 \times 44 = 10 \times 22 = 11 \times 20$ (ni 3, ni 6, ni 7, ni 8, ni 9, ni 12, ni 13, ni 14 ne divisent 220, et $\sqrt{220} \approx 14,8$).

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.$$

Diviseurs de 284 : $284 = 1 \times 284 = 2 \times 142 = 4 \times 71$ (aucun autre entier jusqu'à $\sqrt{284} \approx 16,9$ ne divise 284, car 71 est premier).

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

Chacun est égal à la somme des diviseurs de l'autre (autres que lui-même) :

220 et 284 sont amicaux.

Exercice 4

3 points

1) Par définition, un entier naturel m est un multiple de 7 s'il existe un entier naturel q tel que $m = 7 \times q$. Comme m est un multiple de 7, on peut donc écrire $m = 7 \times q$ avec $q \in \mathbb{N}$.

2) De même, n est un multiple de 7 : il existe un entier naturel q' tel que $n = 7 \times q'$. Alors

$$m - n = 7q - 7q' = 7(q - q').$$

Comme $m \geq n$, on a $7q \geq 7q'$, donc $q \geq q'$: le nombre $q - q'$ est un entier naturel. Ainsi $m - n$ s'écrit $7 \times$ (entier naturel) : $m - n$ **est un multiple de 7**.

3) a. MOD(a;b) renvoie le reste de la division euclidienne de a par b. On veut le reste de la division de A2 par 7 :

=MOD(A2;7)

Vérification : $6162 = 7 \times 880 + 2$, le reste affiché est bien 2.

b. Un nombre est multiple de 7 si et seulement si le reste de sa division par 7 est nul. On teste donc si B2 vaut 0 :

=SI(B2=0;"oui";"non")

(La formule =SI(MOD(A2;7)=0;"oui";"non") convient aussi.)

c. La cellule A12 contient 8225, et $8225 = 7 \times 1175$: le reste est 0. La cellule C12 affiche donc oui.

Exercice 5

4 points

1) On calcule $a^2 + b^2$ ligne par ligne :

a	b	Valeur de $a^2 + b^2$	Parité de $a^2 + b^2$
6	10	$36 + 100 = 136$	pair
4	5	$16 + 25 = 41$	impair
7	2	$49 + 4 = 53$	impair
9	3	$81 + 9 = 90$	pair

2) a. $a^2 + b^2$ est un nombre pair lorsque les nombres a et b **ont la même parité** (tous deux pairs, comme 6 et 10, ou tous deux impairs, comme 9 et 3).

b. $a^2 + b^2$ est un nombre impair lorsque les nombres a et b **sont de parités différentes** (l'un pair, l'autre impair, comme 4 et 5 ou 7 et 2).

c. Pour qu'un nombre N impair s'écrive $a^2 + b^2$, il faut que

l'un des nombres a et b soit pair et l'autre impair.

3) Par exemple, avec $a = 2$ et $b = 3$ (l'un pair, l'autre impair) : $N = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = \boxed{13}$, qui est bien impair.

4) Avec $a = 2u$ et $b = 2v + 1$:

$$\begin{aligned} N = a^2 + b^2 &= (2u)^2 + (2v + 1)^2 \\ &= 4u^2 + 4v^2 + 4v + 1 \\ &= 4(u^2 + v^2 + v) + 1. \end{aligned}$$

En posant $k = u^2 + v^2 + v$, qui est un entier naturel (somme et produits d'entiers naturels), on obtient

$$N = 4k + 1 \text{ avec } k \in \mathbb{N}.$$

Or $4k = 2 \times (2k)$ est pair, donc $4k + 1$ est impair : N **est impair**, ce qui confirme la conjecture du 2)c.

5) On cherche un nombre $4k + 1$ qui n'est pas une somme de deux carrés. Les carrés inférieurs à 21 sont 0, 1, 4, 9 et 16.

Prenons $21 = 4 \times 5 + 1$: il est bien de la forme $4k + 1$ avec $k = 5$. On essaie toutes les décompositions :

$$21 - 0 = 21, \quad 21 - 1 = 20, \quad 21 - 4 = 17, \quad 21 - 9 = 12, \quad 21 - 16 = 5,$$

et aucun de ces résultats n'est un carré. Donc $\boxed{21 \text{ n'est pas une somme de deux carrés.}}$

La condition « être de la forme $4k + 1$ » est donc nécessaire, mais pas suffisante. ($33 = 4 \times 8 + 1$ convient aussi.)

Exercice 6**4 points**

- 1) **Vrai.** $9n + 6 = 3 \times 3n + 3 \times 2 = 3(3n + 2)$, et $3n + 2$ est un entier relatif : $9n + 6$ est un multiple de 3.
- 2) **Faux.** Contre-exemple : 0,001 est un nombre décimal, mais $0,001 \times 100 = 0,1$ n'est pas un entier.
- 3) **Vrai.** a est pair, donc il existe un entier p tel que $a = 2p$. Alors $5a + 2 = 10p + 2 = 2(5p + 1)$, avec $5p + 1$ entier : $5a + 2$ est pair.
- 4) **Vrai.** $n = 4 \times 9 = 36$ et ses diviseurs sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 : il y en a exactement 9.
- 5) **Vrai.** Le seul nombre premier pair est 2 ; un nombre premier supérieur ou égal à 3 est donc impair. Il s'écrit $2p + 1$, l'autre $2p' + 1$ (p, p' entiers), et leur somme vaut $2p + 2p' + 2 = 2(p + p' + 1)$: elle est paire.
- 6) **Vrai.** Si $x \in]0,5 ; 7]$, alors $x > 0,5$, et comme $0,5 > 0$, on a $x > 0$, donc a fortiori $x \geq 0$.
- 7) **Faux.** Contre-exemple : $x = -1$ appartient à $[-1 ; 10[$ (crochet fermé en -1), mais l'inégalité $-1 < -1$ est fausse. On a seulement $-1 \leq x < 10$.