

Exercice 1

2,5 points

- 1) Un réel appartient à la réunion s'il appartient à l'un ou l'autre des intervalles. Les intervalles $[6 ; 10[$ et $[7 ; 15[$ se chevauchent; leur réunion va de 6 (inclus) à 15 (exclu) :

$$[6 ; 10[\cup [7 ; 15[= [6 ; 15[.$$

Réponse d.

(La réponse b. est l'intersection $[6 ; 10[\cap [7 ; 15[$, et non la réunion.)

- 2) La distance entre deux réels a et b est $|a - b|$:

$$\left| 5 - \frac{1}{4} \right| = \left| \frac{20}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{19}{4} = 4,75.$$

Réponse a.

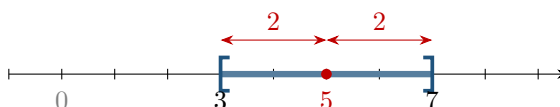
Une distance n'est jamais négative (b.); c. et d. correspondent à $\left| 5 + \frac{1}{4} \right| = \frac{21}{4}$, qui n'est pas une distance entre 5 et $\frac{1}{4}$.

- 3) $|x - 5| \leq 2$ signifie que la distance entre x et 5 est inférieure ou égale à 2, c'est-à-dire que $x \in [5 - 2 ; 5 + 2]$:

$$|x - 5| \leq 2 \iff 3 \leq x \leq 7.$$

Réponse c.

Graphiquement : les solutions sont les réels situés à une distance au plus 2 de 5, entre $5 - 2 = 3$ et $5 + 2 = 7$, bornes comprises.



- 4) $24 = 2^3 \times 3$ et $90 = 2 \times 3^2 \times 5$, donc

$$24 \times 90 = 2^3 \times 3 \times 2 \times 3^2 \times 5 = 2^4 \times 3^3 \times 5 (= 2\,160).$$

Réponse c.

La réponse b. donne bien 2 160, mais 16 et 27 ne sont pas des nombres premiers : ce n'est pas une décomposition en facteurs premiers.

- 5) n et $n + 1$ sont deux entiers consécutifs : l'un des deux est pair, donc leur produit est pair.

Réponse a.

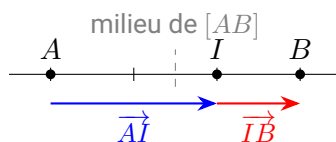
Les autres réponses sont fausses : pour $n = 2$, $n(n + 1) = 6$ n'est ni impair ni premier; pour $n = 4$, $n(n + 1) = 20$ n'est pas multiple de 3.

Exercice 2

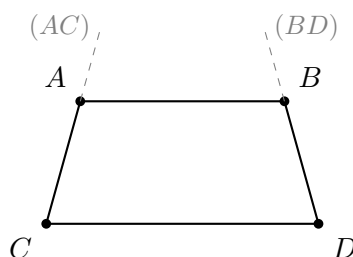
4,5 points

Partie A

- 1) **Faux.** Si I était le milieu de $[AB]$, on aurait $\vec{AI} = \vec{IB}$. Contre-exemple : sur une droite graduée, A d'abscisse 0, I d'abscisse 2 et B d'abscisse 3. On a $\vec{AI} = 2\vec{IB}$ ($AI = 2$ et $IB = 1$, même sens), mais le milieu de $[AB]$ a pour abscisse 1,5.



- 2) **Faux.** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc (AB) et (CD) sont parallèles : $ABDC$ est un trapèze dont (AC) et (BD) sont les côtés non parallèles. Contre-exemple :

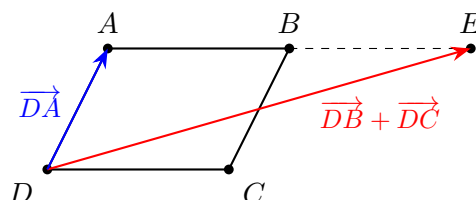


Ici $\overrightarrow{AB}$ mesure 3 carreaux, $\overrightarrow{CD}$ en mesure 4, dans le même sens : $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$, mais les droites (AC) et (BD) se coupent (elles ne sont pas parallèles).

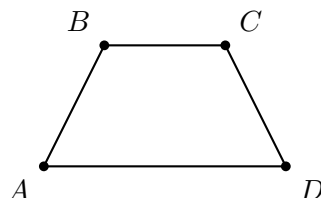
- 3) **Faux.** Dans le parallélogramme $ABCD$, la règle du parallélogramme donne $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$, donc

$$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DC} \neq \overrightarrow{DA} \quad \text{car } \overrightarrow{DC} \neq \vec{0}.$$

Contre-exemple : on construit $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DE}$ avec $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$; le point E n'est pas A .



- 4) **Faux.** Un trapèze a deux côtés opposés parallèles, mais ce ne sont pas forcément $[AB]$ et $[CD]$. Contre-exemple : le trapèze $ABCD$ ci-dessous a pour bases $[BC]$ et $[AD]$; les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires, donc aucun réel k ne vérifie $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

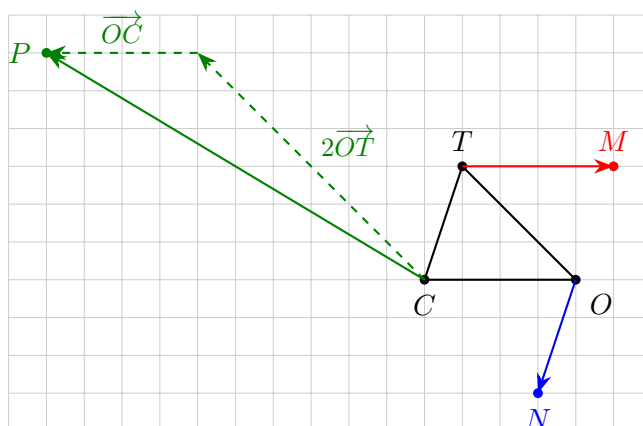


Partie B

On lit les vecteurs sur le quadrillage (en carreaux) : $\overrightarrow{OC}$: 4 carreaux vers la gauche; $\overrightarrow{CT}$: 1 vers la droite et 3 vers le haut; $\overrightarrow{OT}$: 3 vers la gauche et 3 vers le haut.

- $\overrightarrow{TM} = -\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CO}$: on part de T et on avance de 4 carreaux vers la droite.
- $\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{CT}$ équivaut à $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{TC}$: on part de O et on se déplace de 1 vers la gauche et 3 vers le bas.

- $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OC}$: $2\overrightarrow{OT}$ correspond à 6 vers la gauche et 6 vers le haut, auquel on ajoute 4 vers la gauche. On part de C et on se déplace de 10 carreaux vers la gauche et 6 vers le haut.

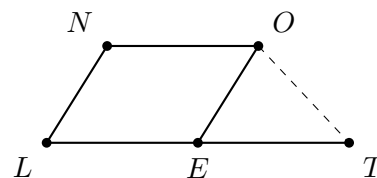


Partie C

$NOEL$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{LE}$.

T est le symétrique de L par rapport à E , donc E est le milieu de $[LT]$ et $\overrightarrow{LE} = \overrightarrow{ET}$.

Ainsi $\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{ET}$.



Avec la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TE} = \overrightarrow{ET} + \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TE} = \overrightarrow{OT} + \underbrace{\overrightarrow{ET} + \overrightarrow{TE}}_{= \overrightarrow{EE} = \vec{0}},$$

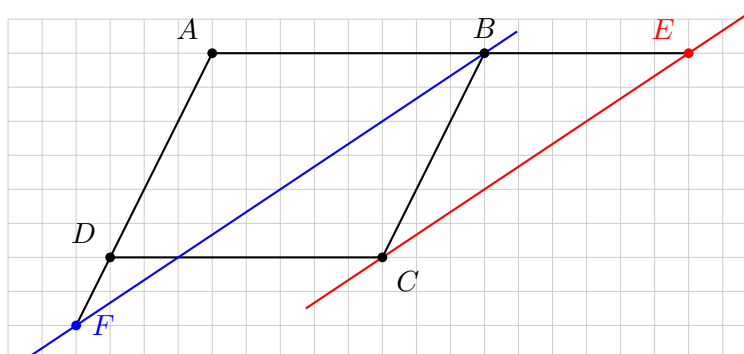
donc $\boxed{\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{OT}}$.

(Autre rédaction : $\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{ET}$ signifie que $NOTE$ est un parallélogramme, et dans ce parallélogramme $\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{OT}$.)

Exercice 3

4 points

- 1) a. $\overrightarrow{AB}$ correspond à 8 carreaux vers la droite, donc $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ à 6 carreaux vers la droite à partir de B .
 $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AD}$ correspond à 3 carreaux vers la gauche et 6 vers le bas, donc on part de D et on se déplace de 1 carreau vers la gauche et 2 vers le bas.



b. Sur la figure, les droites (CE) et (BF) semblent parallèles.

Conjecture : $(CE) \parallel (BF)$.

2) a. D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}$.

b. $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, d'où $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}$. De plus $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.
Donc

$$\overrightarrow{CE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}.$$

3) a. D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}$.

b. D'une part, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (Chasles).
D'autre part, $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Donc

$$\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \text{ soit } \overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}.$$

4) a. On compare les coefficients de $\overrightarrow{AD}$: $\frac{4}{3} = k \times (-1)$, ce qui suggère $k = -\frac{4}{3}$. On vérifie :

$$-\frac{4}{3}\overrightarrow{CE} = -\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BF}.$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{BF} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{CE}, \text{ c'est-à-dire } k = -\frac{4}{3}.$$

Vérification sur le quadrillage : $\overrightarrow{CE}$ correspond à $(9; 6)$ carreaux et $\overrightarrow{BF}$ à $(-12; -8)$, et $-\frac{4}{3} \times 9 = -12$, $-\frac{4}{3} \times 6 = -8$.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires, donc les droites (BF) et (CE) sont parallèles (elles ne sont pas confondues, car C n'est pas sur (BF)). La conjecture est **vérifiée**.

Exercice 4

3 points

1) a. Le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse -2 a pour ordonnée 4. Un nombre n'a qu'une seule image :
 $f(-2) = 4$.

b. On trace la droite horizontale d'équation $y = 1$: elle coupe $\mathcal{C}_f$ en trois points, d'abscisses environ $-2,4, 0,4$ et 1 . Les antécédents de 1 sont donc environ $-2,4, 0,4$ et 1 :

$$f(-2,4) \approx 1, \quad f(0,4) \approx 1, \quad f(1) = 1.$$

(Une lecture de 0,5 au lieu de 0,4 est acceptable compte tenu de la précision du graphique.)

2) Par lecture graphique :

x	$-2,5$	-1	0	1
$f(x)$	0	5	2	1

- 3) La courbe $\mathcal{C}_f$ ne coupe l'axe des abscisses qu'en un seul point, d'abscisse environ $-2,5$. Le point $A(2; 0)$, situé sur l'axe des abscisses, n'est donc pas un point de $\mathcal{C}_f$. Autrement dit, 0 n'est pas l'image de 2 : $f(2) \neq 0$ (à l'abscisse 2, la courbe est déjà sortie du cadre par le haut, bien au-dessus de l'axe des abscisses).

Exercice 5

3 points

- 1)
- $B \cap F$: « l'adhérent est une femme **et** il joue au basket-ball ».
 - $B \cup F$: « l'adhérent joue au basket-ball **ou** est une femme » (au moins l'un des deux).
 - $\overline{B \cup F}$: « l'adhérent ne joue pas au basket-ball **et** n'est pas une femme », c'est-à-dire « l'adhérent est un homme qui pratique le volley-ball ou le judo ».

- 2) La licence est choisie au hasard parmi les 1 000 : on est en situation d'équiprobabilité.

- $p(B) = \frac{380}{1\,000}$, soit $p(B) = 0,38$.
- $p(F) = \frac{600}{1\,000}$, soit $p(F) = 0,6$.
- $B \cap F$ correspond aux 250 femmes qui jouent au basket-ball :
 $p(B \cap F) = \frac{250}{1\,000}$, soit $p(B \cap F) = 0,25$.
- $p(B \cup F) = p(B) + p(F) - p(B \cap F) = 0,38 + 0,6 - 0,25$, soit $p(B \cup F) = 0,73$.
- $p(\overline{B \cup F}) = 1 - p(B \cup F) = 1 - 0,73$, soit $p(\overline{B \cup F}) = 0,27$.

Vérification : $\overline{B \cup F}$ correspond aux hommes qui pratiquent le volley-ball ou le judo :

$$\frac{128 + 142}{1\,000} = \frac{270}{1\,000} = 0,27.$$

- 3) On ne regarde que la ligne « Homme » du tableau : il y a 400 hommes, dont 142 pratiquent le judo. La fréquence cherchée est

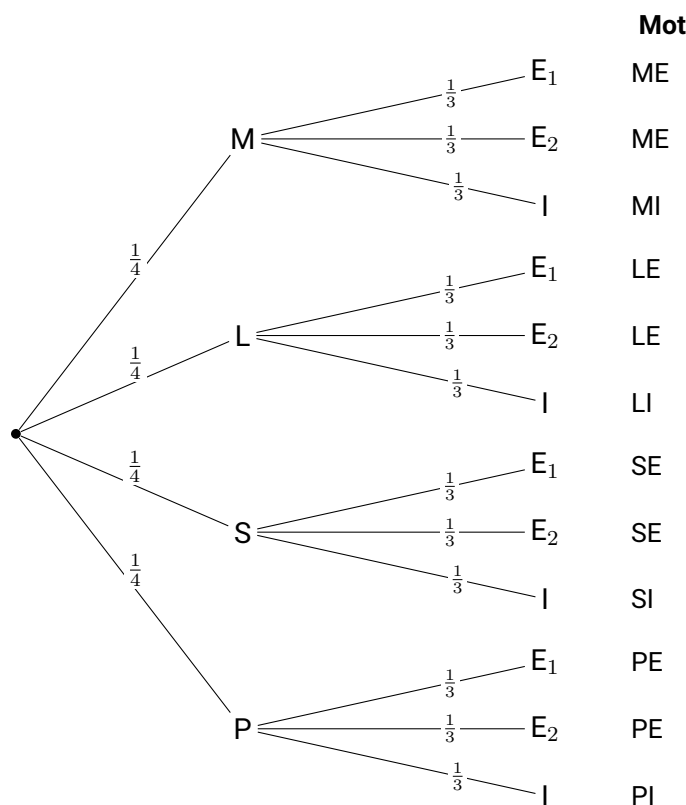
$$\frac{142}{400} = \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0,355,$$

soit 35,5 % des hommes du club.

Exercice 6

3 points

- 1) a. Les probabilités demandées à la question 2) sont déjà portées sur les branches. Les deux jetons E sont distingués (E_1 et E_2) : chaque jeton a la même chance d'être tiré. Chaque consonne a une probabilité $\frac{1}{4}$, chaque jeton voyelle une probabilité $\frac{1}{3}$.



- b. Il y a 4 choix de consonne, puis 3 choix de jeton voyelle : $4 \times 3 = 12$ issues, toutes de probabilité $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.
(Comme les deux jetons E donnent la même lettre, on obtient seulement 8 mots différents, mais les mots ME, LE, SE et PE correspondent chacun à 2 issues.)
- 2) Voir les probabilités portées sur l'arbre ci-dessus : $\frac{1}{4}$ sur chaque branche du premier niveau, $\frac{1}{3}$ sur chaque branche du second.
- 3) Les 12 issues sont équiprobables, de probabilité $\frac{1}{12}$ chacune.

- a. L est réalisé par les 3 issues LE_1 , LE_2 , LI :

$$p(L) = 3 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{12}, \text{ soit } p(L) = \frac{1}{4}.$$

- b. I est réalisé par les 4 issues MI , LI , SI , PI :

$$p(I) = \frac{4}{12}, \text{ soit } p(I) = \frac{1}{3}.$$

- c. P est réalisé dès que la consonne n'est pas P, soit $3 \times 3 = 9$ issues :

$$p(P) = \frac{9}{12}, \text{ soit } p(P) = \frac{3}{4}.$$

(Ou : la probabilité de tirer P est $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, et $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.)

- d. Ne contenir ni S ni E, c'est avoir une consonne parmi M, L, P et la voyelle I : issues MI, LI, PI, soit 3 issues :

$$p(B) = \frac{3}{12}, \text{ soit } \boxed{p(B) = \frac{1}{4}}.$$

- 4) Le mot PI correspond à une seule issue : sa probabilité est $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \approx 0,083$.

Or $\frac{1}{12} > 0,08$ (car $0,08 \times 12 = 0,96 < 1$). Julien a tort.