

Exercice 1

3 points

On utilise les identités remarquables $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$\begin{aligned} \text{a. } (2x + 5)^2 + (3x - 4)^2 &= [(2x)^2 + 2 \times 2x \times 5 + 5^2] + [(3x)^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2] \\ &= (4x^2 + 20x + 25) + (9x^2 - 24x + 16) \\ &= \boxed{13x^2 - 4x + 41} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. On développe d'abord le produit : } (5x + 1)(x - 3) &= 5x^2 - 15x + x - 3 = 5x^2 - 14x - 3. \\ (3x - 2)^2 - (5x + 1)(x - 3) &= [(3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2] - (5x^2 - 14x - 3) \\ &= 9x^2 - 12x + 4 - 5x^2 + 14x + 3 \\ &= \boxed{4x^2 + 2x + 7} \end{aligned}$$

Attention au signe « - » devant la parenthèse : il change le signe de chaque terme.

Exercice 2

3 points

$$\begin{aligned} \text{a. On reconnaît une différence de deux carrés } a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \text{ avec } a = 3x + 5 \text{ et } b = 2. \\ (3x + 5)^2 - 4 &= (3x + 5)^2 - 2^2 \\ &= [(3x + 5) - 2][(3x + 5) + 2] \\ &= \boxed{(3x + 3)(3x + 7)} \end{aligned}$$

On peut aller plus loin en mettant 3 en facteur dans $3x + 3$: $(3x + 5)^2 - 4 = 3(x + 1)(3x + 7)$.

$$\begin{aligned} \text{b. Le facteur commun est } (x + 2). \\ (x + 2)^2 - 4x(x + 2) &= (x + 2)[(x + 2) - 4x] \\ &= \boxed{(x + 2)(-3x + 2)} \end{aligned}$$

Exercice 3

5,5 points

a. On multiplie les deux membres par 20, multiple commun de 5 et 4.

$$\begin{aligned} \frac{3x + 4}{5} = \frac{2x - 1}{4} &\iff 4(3x + 4) = 5(2x - 1) \quad (\text{on multiplie par 20}) \\ &\iff 12x + 16 = 10x - 5 \\ &\iff 2x = -21 \quad (\text{on retranche } 10x \text{ et } 16) \\ &\iff x = -\frac{21}{2} \quad (\text{on divise par 2}) \end{aligned}$$

$$S = \left\{ -\frac{21}{2} \right\}$$

b. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

$$(2x + 3)(5x - 1) = 0 \iff 2x + 3 = 0 \quad \text{ou} \quad 5x - 1 = 0$$

$$\iff x = -\frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{5}$$

$$S = \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{1}{5} \right\}$$

c. On factorise par x pour se ramener à une équation produit nul.

$$-3x^2 + 5x = 0 \iff x(-3x + 5) = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -3x + 5 = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{5}{3}$$

$$S = \left\{ 0; \frac{5}{3} \right\}$$

d. Le quotient n'existe que si $x - 3 \neq 0$: la valeur 3 est **interdite**.

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul. Pour $x \neq 3$:

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 0 \iff x^2 - 9 = 0$$

$$\iff (x - 3)(x + 3) = 0 \quad (\text{identité } a^2 - b^2)$$

$$\iff x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

Or 3 est une valeur interdite, on l'écarte. Il reste $S = \{-3\}$.

$$\text{Vérification : } \frac{(-3)^2 - 9}{-3 - 3} = \frac{0}{-6} = 0.$$

Exercice 4

5,5 points

1) On reconnaît $a^2 - b^2$ avec $a = x - 5$ et $b = 3$.

$$\begin{aligned} A &= (x - 5)^2 - 3^2 \\ &= [(x - 5) - 3][(x - 5) + 3] \\ &= (x - 8)(x - 2) \end{aligned}$$

2) $A = (x - 5)^2 - 9$

$$\begin{aligned} &= x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 - 9 \\ &= x^2 - 10x + 25 - 9 \\ &= x^2 - 10x + 16 \end{aligned}$$

Vérification avec la forme factorisée : $(x - 8)(x - 2) = x^2 - 2x - 8x + 16 = x^2 - 10x + 16$.

3) **Équation** $A = 0$. La forme factorisée donne une équation produit nul.

$$\begin{aligned} A = 0 &\iff (x - 8)(x - 2) = 0 \\ &\iff x - 8 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2 = 0 \\ &\iff x = 8 \quad \text{ou} \quad x = 2 \end{aligned}$$

$$S = \{2; 8\}$$

Équation $A = 16$. La forme développée est la plus adaptée : le terme constant 16 disparaît.

$$\begin{aligned} A = 16 &\iff x^2 - 10x + 16 = 16 \\ &\iff x^2 - 10x = 0 && \text{(on retranche 16)} \\ &\iff x(x - 10) = 0 && \text{(on factorise par } x) \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 10 \end{aligned}$$

$$S = \{0; 10\}$$

Vérification : pour $x = 0$, $A = (-5)^2 - 9 = 16$; pour $x = 10$, $A = 5^2 - 9 = 16$.

Exercice 5

3 points

1) $x = AM$ est une longueur et M se déplace sur le segment $[AB]$, de longueur 10 cm. Donc $0 \leq x \leq 10$, c'est-à-dire $x \in [0; 10]$.

2) La zone colorée est formée des deux carrés $AMNP$ et $GNHC$.

- Le carré $AMNP$ a pour côté $AM = x$: son aire est x^2 .
- Le carré $GNHC$ a pour côté $NH = MB = AB - AM = 10 - x$: son aire est $(10 - x)^2$.

En notant $\mathcal{A}(x)$ l'aire de la zone colorée, en cm^2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= x^2 + (10 - x)^2 \\ &= x^2 + 100 - 20x + x^2 \\ &= 2x^2 - 20x + 100 \end{aligned}$$

3) On résout $\mathcal{A}(x) = 50$ sur $[0; 10]$ en se ramenant à une identité remarquable.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) = 50 &\iff 2x^2 - 20x + 100 = 50 \\ &\iff 2x^2 - 20x + 50 = 0 && \text{(on retranche 50)} \\ &\iff x^2 - 10x + 25 = 0 && \text{(on divise par 2)} \\ &\iff (x - 5)^2 = 0 && \text{(identité } a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2) \\ &\iff x - 5 = 0 \\ &\iff x = 5 \end{aligned}$$

Comme $5 \in [0; 10]$, l'aire de la zone colorée vaut 50 cm^2 pour $x = 5$, c'est-à-dire lorsque M est le milieu de $[AB]$.

Vérification : $\mathcal{A}(5) = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$.