

Exercice 1

20 points

Dans le repère d'origine A , on lit sur le parallélépipède rectangle :

$$A(0; 0; 0), \quad B(12; 0; 0), \quad C(12; 18; 0), \quad D(0; 18; 0),$$

$$E(0; 0; 6), \quad F(12; 0; 6), \quad G(12; 18; 6), \quad H(0; 18; 6).$$

1) a. On calcule deux vecteurs du plan (EBD) :

$$\overrightarrow{EB} \begin{pmatrix} 12-0 \\ 0-0 \\ 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} 0-0 \\ 18-0 \\ 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (la première coordonnée de $\overrightarrow{EB}$ est non nulle, celle de $\overrightarrow{ED}$ est nulle alors que $\overrightarrow{ED} \neq \vec{0}$) : ils dirigent donc le plan (EBD) .

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{EB} = 3 \times 12 + 2 \times 0 + 6 \times (-6) = 36 - 36 = 0,$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{ED} = 3 \times 0 + 2 \times 18 + 6 \times (-6) = 36 - 36 = 0.$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EBD) :

$$\boxed{\vec{n}(3; 2; 6) \text{ est normal au plan } (EBD).}$$

b. Comme $\vec{n}(3; 2; 6)$ est normal au plan (EBD) , celui-ci a une équation de la forme

$$3x + 2y + 6z + d = 0, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Le point $E(0; 0; 6)$ appartient au plan : $3 \times 0 + 2 \times 0 + 6 \times 6 + d = 0$, soit $d = -36$.

$$\boxed{(EBD) : 3x + 2y + 6z - 36 = 0}$$

Vérification : B donne $36 + 0 + 0 - 36 = 0$ et D donne $0 + 36 + 0 - 36 = 0$.

2) a. La droite (AG) passe par $A(0; 0; 0)$ et est dirigée par $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de (AG) est donc :

$$\begin{cases} x = 12t \\ y = 18t \\ z = 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(On peut aussi prendre le vecteur directeur $\frac{1}{6}\overrightarrow{AG}(2; 3; 1) : x = 2t, y = 3t, z = t$.)

b. Un point $N(12t; 18t; 6t)$ de (AG) appartient au plan (EBD) si et seulement si :

$$3 \times 12t + 2 \times 18t + 6 \times 6t - 36 = 0 \iff 36t + 36t + 36t = 36$$

$$\iff 108t = 36$$

$$\iff t = \frac{1}{3}.$$

L'équation a une unique solution : la droite (AG) coupe le plan (EBD) en un unique point K , obtenu pour $t = \frac{1}{3}$:

$$x_K = 12 \times \frac{1}{3} = 4, \quad y_K = 18 \times \frac{1}{3} = 6, \quad z_K = 6 \times \frac{1}{3} = 2, \quad \text{soit } \boxed{K(4; 6; 2)}.$$

3) La droite (AG) est orthogonale au plan (EBD) si et seulement si son vecteur directeur $\overrightarrow{AG}(12; 18; 6)$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}(3; 2; 6)$.

Or $\frac{12}{3} = 4$ et $\frac{18}{2} = 9$: les coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc $\overrightarrow{AG}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires.

(Autre argument : $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EB} = 12 \times 12 + 18 \times 0 + 6 \times (-6) = 108 \neq 0$, donc (AG) n'est même pas orthogonale à la droite (EB) du plan.)

La droite (AG) n'est pas orthogonale au plan (EBD) .

4) a. M est le milieu de $[ED]$:

$$M\left(\frac{0+0}{2}; \frac{0+18}{2}; \frac{6+0}{2}\right), \quad \text{soit } M(0; 9; 3).$$

$$\overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} 4-12 \\ 6-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} 0-12 \\ 9-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $-12 = \frac{3}{2} \times (-8)$, $9 = \frac{3}{2} \times 6$ et $3 = \frac{3}{2} \times 2$, donc

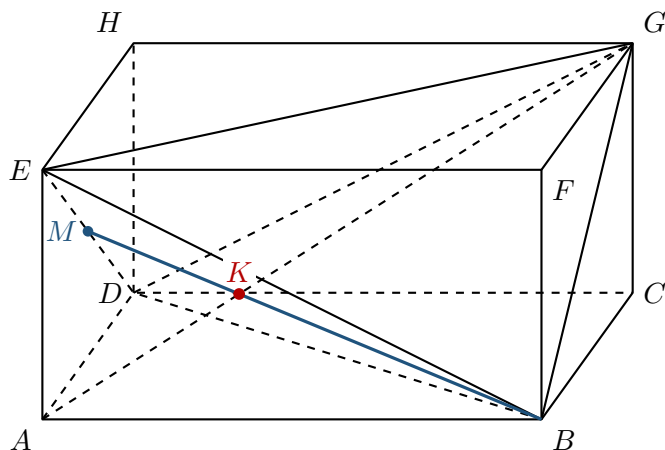
$$\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BK}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires : les points B , K et M sont alignés.

b. D'après la question précédente, $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BM}$: le point K est sur le segment $[BM]$, aux deux tiers de $[BM]$ en partant de B .

Construction : on place le milieu M de $[ED]$, on trace le segment $[BM]$ (médiane du triangle EBD issue de B), puis on place K sur $[BM]$ tel que $BK = \frac{2}{3}BM$. On peut contrôler la construction : K est aussi sur le segment $[AG]$ (avec $AK = \frac{1}{3}AG$, puisque $t = \frac{1}{3}$).

Remarque : $\frac{x_E + x_B + x_D}{3} = 4$, $\frac{y_E + y_B + y_D}{3} = 6$ et $\frac{z_E + z_B + z_D}{3} = 2$: K est le centre de gravité du triangle EBD , intersection de ses médianes.



- 5) **Équation du plan $\mathcal{P}$.** Le plan (ADE) contient $A(0; 0; 0)$, $D(0; 18; 0)$ et $E(0; 0; 6)$: c'est le plan d'équation $x = 0$ (face $ADHE$). Un plan parallèle à (ADE) a une équation de la forme $x = k$; comme il passe par $K(4; 6; 2)$:

$$\mathcal{P} : x = 4.$$

Les plans $\mathcal{P}$ et (EBD) sont sécants. Leurs vecteurs normaux $(1; 0; 0)$ et $\vec{n}(3; 2; 6)$ ne sont pas colinéaires.

Intersection. Un point $(x; y; z)$ appartient aux deux plans si et seulement si :

$$\begin{cases} x = 4 \\ 3x + 2y + 6z - 36 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ 2y + 6z = 24 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 12 - 3z \end{cases}$$

En posant $z = s$, l'intersection est la droite Δ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 12 - 3s \\ z = s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R},$$

qui passe par K (pour $s = 2$) et qui est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Parallélisme. $\overrightarrow{ED}(0; 18; -6)$ et $\overrightarrow{ED} = -6\vec{u}$: les vecteurs directeurs sont colinéaires.

Le plan $\mathcal{P}$ coupe le plan (EBD) selon la droite Δ passant par K , parallèle à (ED) .

Autre méthode, sans calcul : la droite (ED) est contenue dans le plan (ADE) , qui est parallèle à $\mathcal{P}$; donc (ED) est parallèle au plan $\mathcal{P}$. Comme (ED) est aussi contenue dans le plan (EBD) , qui coupe $\mathcal{P}$, la droite d'intersection de $\mathcal{P}$ et de (EBD) est parallèle à (ED) .