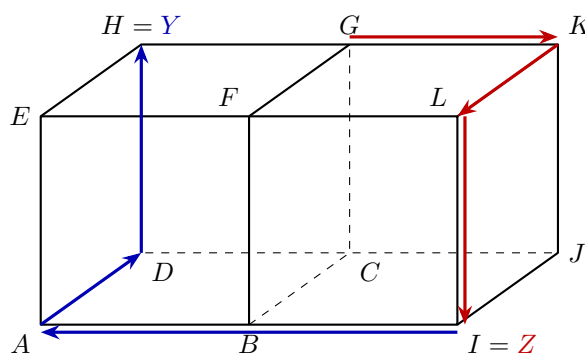


Exercice 1

8 points

On note que, les deux cubes étant de même taille et posés côte à côte : $\vec{BI} = \vec{CJ} = \vec{FL} = \vec{GK} = \vec{AB}$, $\vec{BC} = \vec{EH} = \vec{FG} = \vec{IJ} = \vec{LK} = \vec{AD}$ et $\vec{DH} = \vec{BF} = \vec{CG} = \vec{IL} = \vec{JK} = \vec{AE}$.



1) a. On part de I et on enchaîne les vecteurs (chemin bleu) :

- $-\vec{2AB} = \vec{BA} + \vec{IB} = \vec{IA}$: on va de I à A ;
- $\vec{AD}$: on va de A à D ;
- $\vec{AE} = \vec{DH}$: on va de D à H .

Ainsi $\vec{IY} = \vec{IA} + \vec{AD} + \vec{DH} = \vec{IH}$ (relation de Chasles), donc $\boxed{Y = H}$.

b. On part de G (chemin rouge) :

- $\vec{AB} = \vec{GK}$: on va de G à K ;
- $-\vec{AD} = \vec{KL}$: on va de K à L ;
- $-\vec{DH} = \vec{LI}$: on va de L à I .

Ainsi $\vec{GZ} = \vec{GK} + \vec{KL} + \vec{LI} = \vec{GI}$, donc $\boxed{Z = I}$.

2) a. Par la relation de Chasles :

$$\vec{IG} = \vec{IB} + \vec{BC} + \vec{CG} = -\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE},$$

$$\text{soit } \boxed{\vec{IG} = -\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}}.$$

b. De même :

$$\vec{CE} = \vec{CD} + \vec{DA} + \vec{AE} = -\vec{AB} - \vec{AD} + \vec{AE},$$

$$\text{soit } \boxed{\vec{CE} = -\vec{AB} - \vec{AD} + \vec{AE}}.$$

3) QCM (justifications données pour la correction; elles n'étaient pas demandées).

On peut raisonner dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$: $A(0; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $C(1; 1; 0)$, $G(1; 1; 1)$, $H(0; 1; 1)$, $I(2; 0; 0)$, $J(2; 1; 0)$, $K(2; 1; 1)$, $L(2; 0; 1)$, $F(1; 0; 1)$.

a. (EF) est dirigée par $\vec{AB}$ et (JK) par $\vec{AE}$: elles ne sont pas parallèles. Tous les points de (EF) ont pour ordonnée 0 (face avant $ABFE$), tous ceux de (JK) ont pour ordonnée 1

(face arrière) : ces droites n'ont aucun point commun. Non parallèles et sans point commun : **D. non coplanaires**.

b. (EL) est dirigée par $\overrightarrow{AB}$, (AK) par $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$: non colinéaires. Les points de (EL) vérifient $y = 0$ et $z = 1$; ceux de (AK) s'écrivent $(2t; t; t)$: $y = 0$ impose $t = 0$, alors $z = 0 \neq 1$. Aucun point commun : **D. non coplanaires**.

c. Les quatre points H, C, K, J ont pour ordonnée 1 : ils sont dans le plan (DCG) (face arrière). (HC) est dirigée par $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$ et (KJ) par $\overrightarrow{KJ} = -\overrightarrow{AE}$: non colinéaires. Deux droites coplanaires non parallèles sont sécantes : **A. sécantes**.

Vérification : le point de (HC) de paramètre 2, $H + 2\overrightarrow{HC} = (2; 1; -1)$, est aussi le point $K + 2\overrightarrow{KJ}$ de (KJ) : les droites se coupent en dehors des cubes, sous le point J .

d. (GL) est dirigée par $\overrightarrow{GL} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ et (DI) par $\overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$: non colinéaires. Or (GL) est contenue dans le plan du dessus ($z = 1$) et (DI) dans le plan du dessous ($z = 0$), plans strictement parallèles : aucun point commun. **D. non coplanaires**.

Exercice 2

12 points

Partie A : étude d'un modèle discret

1) f est une fonction polynôme, dérivable sur $[0; 1]$, et pour tout $x \in [0; 1]$:

$$f'(x) = 1 - 0,8x.$$

Pour $0 \leq x \leq 1$, on a $0,8x \leq 0,8$, donc $f'(x) \geq 1 - 0,8 = 0,2 > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; 1]$, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 - 0,4 = 0,6$.

x	0	1
$f'(x)$	+	
f	0	0,6

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ ».

Initialisation. $u_0 = 0,6$ et $u_1 = 0,6 - 0,4 \times 0,6^2 = 0,6 - 0,144 = 0,456$. On a bien $0 \leq 0,456 \leq 0,6 \leq 1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} &0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1 \\ \Rightarrow &f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(1) \quad (f \text{ est croissante sur } [0; 1]) \\ \Leftrightarrow &0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 0,6 \quad (\text{car } u_{k+1} = f(u_k), f(0) = 0, f(1) = 0,6) \\ \Rightarrow &0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1 \quad (\text{car } 0,6 \leq 1) \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1.$$

- 3) D'après la question 2), pour tout n , $u_{n+1} \leq u_n$: la suite (u_n) est **décroissante**. De plus $u_n \geq 0$ pour tout n : elle est **minorée par 0**.

Une suite décroissante et minorée converge (théorème de la convergence monotone), donc la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite; comme $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n , on a $0 \leq \ell \leq 1$.

- 4) La suite (u_n) converge vers $\ell \in [0; 1]$, et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue sur $[0; 1]$ (fonction polynôme). D'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$:

$$\begin{aligned} \ell - 0,4\ell^2 &= \ell \\ \Leftrightarrow -0,4\ell^2 &= 0 \quad (\text{on retranche } \ell) \\ \Leftrightarrow \ell &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Ce n'est pas une bonne nouvelle pour les koalas : selon ce modèle, la proportion de feuilles d'eucalyptus comestibles tend vers 0, c'est-à-dire que la forêt ne pourrait plus, à terme, nourrir les koalas.

Vérification numérique : $u_2 \approx 0,373$, $u_5 \approx 0,246$, $u_8 \approx 0,186$: la suite décroît bien, lentement, vers 0.

Partie B : étude d'un modèle continu d'évolution

- 1) On pose $v(t) = 0,4 + 3,6 e^{-0,5t}$. Pour tout $t \in [0; 20]$, $v(t) > 0$ (somme de nombres strictement positifs), donc $g = \frac{1000}{v}$ est dérivable sur $[0; 20]$, avec $v'(t) = 3,6 \times (-0,5) e^{-0,5t} = -1,8 e^{-0,5t}$. Ainsi :

$$g'(t) = -\frac{1000 v'(t)}{v(t)^2} = \frac{1800 e^{-0,5t}}{(0,4 + 3,6 e^{-0,5t})^2}.$$

Une exponentielle est strictement positive et le dénominateur est un carré non nul, donc $g'(t) > 0$: g est **strictement croissante** sur $[0; 20]$.

Valeurs aux bornes : $g(0) = \frac{1000}{0,4 + 3,6} = \frac{1000}{4} = 250$ (on retrouve les 250 koalas de 2020) et $g(20) = \frac{1000}{0,4 + 3,6 e^{-10}} \approx 2499$.

t	0	20
$g'(t)$	+	
g	250	$\frac{1000}{0,4 + 3,6 e^{-10}} \approx 2499$

- 2) Sur $[0; 20]$, la fonction g est **continue** (car dérivable) et **strictement croissante**. De plus $g(0) = 250 < 2000$ et $g(20) \approx 2499 > 2000$, donc $2000 \in [g(0); g(20)]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection) :

l'équation $g(t) = 2000$ admet une unique solution α dans $[0 ; 20]$.

3) La fonction g étant strictement croissante, $g(t) > 2000 \iff t > \alpha$. Il suffit donc de localiser α .

À la calculatrice (tableau de valeurs) :

$$g(7) \approx 1965,8 < 2000 \quad \text{et} \quad g(8) \approx 2146,2 > 2000,$$

donc $7 < \alpha < 8$; plus finement, $g(7,16) \approx 1998,6$ et $g(7,17) \approx 2000,6$, donc $7,16 < \alpha < 7,17$.

Pour information, on peut aussi résoudre exactement (avec la fonction logarithme népérien) :

$$\begin{aligned} g(t) &= 2000 \\ \iff 0,4 + 3,6 e^{-0,5t} &= 0,5 \quad (\text{on passe à l'inverse et on multiplie par 1000}) \\ \iff e^{-0,5t} &= \frac{1}{36} \quad (\text{on retranche 0,4 puis on divise par 3,6}) \\ \iff t &= 2 \ln 36 \approx 7,167. \quad (\text{on applique } \ln \text{ puis on multiplie par } -2) \end{aligned}$$

$t = 7$ correspond au 1^{er} janvier 2027 et $t = 8$ au 1^{er} janvier 2028. Comme $7 < \alpha < 8$, le nombre de koalas dépasse 2000 pour la première fois

au cours de l'année 2027

(vers le début du mois de mars, puisque $0,167 \times 365 \approx 61$ jours).