

Exercice 1

5 points

- 1) À chaque cours, on interroge un élève au hasard parmi les 35 : c'est une épreuve de Bernoulli dont le succès « l'élève interrogé est un expert » a pour probabilité $p = \frac{12}{35}$.

Le professeur ne se souvient pas des élèves déjà interrogés : les n interrogations sont identiques et indépendantes (tirages avec remise).

E compte le nombre de succès lors de ces n épreuves, donc E suit la loi binomiale

$$E \sim \mathcal{B}\left(n; \frac{12}{35}\right).$$

- 2) Ici $n = 10$:

$$P(E = 5) = \binom{10}{5} \left(\frac{12}{35}\right)^5 \left(\frac{23}{35}\right)^5 = 252 \times \left(\frac{12}{35}\right)^5 \left(\frac{23}{35}\right)^5,$$

soit $P(E = 5) \approx 0,146$ (à 10^{-3} près).

- 3) La probabilité qu'aucun expert ne soit interrogé lors des n premiers cours est

$$P(E = 0) = \left(\frac{23}{35}\right)^n.$$

On résout, pour n entier strictement positif :

$$\begin{aligned} \left(\frac{23}{35}\right)^n < 0,05 &\iff n \ln\left(\frac{23}{35}\right) < \ln(0,05) \quad (\text{la fonction } \ln \text{ est strictement croissante}) \\ &\iff n > \frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{23}{35}\right)} \quad (\text{on divise par } \ln\left(\frac{23}{35}\right) < 0) \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{23}{35}\right)} \approx 7,14$. La probabilité devient inférieure à 0,05 à partir de **8 cours**.

Vérification : $\left(\frac{23}{35}\right)^7 \approx 0,053 > 0,05$ et $\left(\frac{23}{35}\right)^8 \approx 0,035 < 0,05$.

- 4) Sur 40 cours, $E \sim \mathcal{B}\left(40; \frac{12}{35}\right)$, donc

$$E(E) = np = 40 \times \frac{12}{35} = \frac{96}{7} \approx 13,7.$$

En moyenne, le professeur peut espérer interroger environ **14 élèves « experts »** durant le trimestre.

Exercice 2

5 points

- 1) Le choix d'un pneu est une épreuve de Bernoulli dont le succès « le pneu est défectueux » a pour probabilité 0,065.

Le stock étant assimilé à un tirage avec remise, les n choix sont identiques et indépendants.

X compte le nombre de succès, donc X suit la loi binomiale de paramètres **n et $p = 0,065$** .

2) Ici $X \sim \mathcal{B}(12; 0,065)$.

a. $P(X = 0) = 0,935^{12}$, soit $P(X = 0) \approx 0,446$.

b. $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$ avec

$$P(X = 1) = \binom{12}{1} \times 0,065 \times 0,935^{11} \approx 0,372$$

et

$$P(X = 2) = \binom{12}{2} \times 0,065^2 \times 0,935^{10} \approx 0,142.$$

Donc $P(X \leq 2) \approx 0,961$ (à 10^{-3} près, valeur obtenue sans arrondir les termes intermédiaires).

3) Pour $n = 4$, $X \sim \mathcal{B}(4; 0,065)$ et

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,935^4 \approx 0,236.$$

Comme $0,236 < 0,5$, l'affirmation est **fausse** : il y a moins d'une chance sur quatre qu'au moins un des quatre pneus soit défectueux.

Exercice 3

10 points

1) Notons r la raison de la suite arithmétique. Alors $p_3 = p_4 - r$, $p_2 = p_4 - 2r$ et $p_1 = p_4 - 3r$. La somme des probabilités vaut 1 :

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 &\iff 4p_4 - 6r = 1 \\ &\iff 1,6 - 6r = 1 \quad (\text{on remplace } p_4 \text{ par } 0,4) \\ &\iff r = 0,1. \end{aligned}$$

D'où $p_3 = 0,3$, $p_2 = 0,2$ et $p_1 = 0,1$.
Vérification : $0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,4 = 1$.

2) a. Les lancers étant indépendants :

$$P(\text{« 1 puis 2 puis 4 »}) = p_1 \times p_2 \times p_4 = 0,1 \times 0,2 \times 0,4 = 0,008.$$

b. Trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant correspondent aux quatre issues $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 4)$ et $(2, 3, 4)$, deux à deux incompatibles :

$$\begin{aligned} P &= p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 p_4 + p_1 p_3 p_4 + p_2 p_3 p_4 \\ &= 0,006 + 0,008 + 0,012 + 0,024 = 0,05. \end{aligned}$$

3) a. Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli de succès « obtenir 4 », de probabilité $p_4 = 0,4$. On répète 10 fois cette épreuve de façon identique et indépendante, et X compte le nombre de succès :

$$X \sim \mathcal{B}(10; 0,4).$$

b. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 10$:

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \times 0,4^k \times 0,6^{10-k}.$$

c. $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,4^2 \times 0,6^8 = 45 \times 0,16 \times 0,6^8$, soit $P(X = 2) \approx 0,121$.

d. $E(X) = np = 10 \times 0,4 = 4$.

Interprétation : sur un grand nombre de séries de dix lancers, on obtient en moyenne 4 fois le nombre 4 par série.

e. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,6^{10}$, soit $P(X \geq 1) \approx 0,994$.

f. $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$. À la calculatrice, $P(X \leq 2) \approx 0,167$, donc $P(X \geq 3) \approx 0,833$.

- 4) a. Obtenir le 4 pour la première fois au n -ième lancer, c'est ne pas obtenir 4 lors des $n - 1$ premiers lancers (probabilité 0,6 à chaque fois), puis obtenir 4 au n -ième (probabilité 0,4). Les lancers étant indépendants, pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = 0,6^{n-1} \times 0,4.$$

b. Pour tout $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = 0,6^n \times 0,4 = 0,6 \times (0,6^{n-1} \times 0,4) = 0,6 u_n.$$

(u_n) est donc géométrique de raison $q = 0,6$ et de premier terme $u_1 = 0,4$.

Comme $-1 < 0,6 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^{n-1} = 0$, donc (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

c. S_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $0,6 \neq 1$:

$$S_n = u_1 \times \frac{1 - 0,6^n}{1 - 0,6} = 0,4 \times \frac{1 - 0,6^n}{0,4}, \quad \text{soit} \quad S_n = 1 - 0,6^n.$$

Comme $-1 < 0,6 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^n = 0$, donc (S_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$.

Interprétation : S_n est la probabilité d'obtenir au moins un 4 en n lancers ; elle tend vers 1.

d. On résout, pour n entier non nul :

$$S_n > 0,999 \iff 1 - 0,6^n > 0,999$$

$$\iff 0,6^n < 0,001 \quad (\text{on retranche 1, puis on multiplie par } -1)$$

$$\iff n \ln(0,6) < \ln(0,001) \quad (\text{la fonction } \ln \text{ est strictement croissante})$$

$$\iff n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,6)} \quad (\text{on divise par } \ln(0,6) < 0)$$

Or $\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,6)} \approx 13,52$, donc le plus petit entier cherché est $n = 14$.

Vérification : $S_{13} \approx 0,99869 < 0,999$ et $S_{14} \approx 0,99922 > 0,999$.