

Calculatrice autorisée

Exercice 1**5 points**

Une classe de terminale compte 35 élèves, dont 12 « experts » qui ont choisi l'enseignement « mathématiques expertes ».

À chaque cours de philosophie, le professeur interroge un élève au hasard, sans se souvenir des élèves précédemment interrogés.

- 1) Soient n un entier strictement positif et E la variable aléatoire égale au nombre d'élèves « experts » interrogés lors des n premiers cours.
Quelle est la loi suivie par E ?
- 2) Quelle est la probabilité que, durant les dix premiers cours, exactement cinq élèves « experts » soient interrogés ?
- 3) À partir de combien de cours la probabilité qu'aucun élève « expert » ne soit interrogé devient-elle inférieure à 0,05 ?
- 4) Durant le premier trimestre, il y a 40 cours de philosophie.
Combien d'élèves « experts » le professeur peut-il espérer interroger durant cette période ?

Exercice 2**5 points**

Un garagiste choisit au hasard n pneus dans son stock. Le stock est suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

Le fabricant des pneus annonce qu'un pneu pris au hasard a un défaut avec une probabilité de 0,065.

La variable aléatoire X modélise le nombre de pneus défectueux dans le lot de n pneus.

- 1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
- 2) Dans cette question uniquement, $n = 12$.
 - a. Calculer la probabilité qu'aucun pneu défectueux ne soit choisi.
 - b. Calculer la probabilité qu'au plus deux pneus choisis soient défectueux.
- 3) Est-il vrai que, si le garagiste change les quatre pneus d'une voiture, il y a plus d'une chance sur deux pour qu'au moins un pneu soit défectueux ?

Exercice 3**10 points**

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les numéros 1, 2, 3 et 4. Quand il retombe, une seule face est cachée : on lit le numéro inscrit sur la face cachée. Pour $k \in \{1; 2; 3; 4\}$, on note p_k la probabilité d'obtenir le numéro k sur la face cachée.

Le dé est déséquilibré de sorte que les nombres p_1 , p_2 , p_3 et p_4 , dans cet ordre, sont les premiers termes d'une suite arithmétique.

- 1) Sachant que $p_4 = 0,4$, déterminer les valeurs de p_3 , p_2 et p_1 .

- 2) On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
- Quelle est la probabilité d'obtenir, dans cet ordre, les nombres 1, 2, 4 ?
 - Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?
- 3) On lance désormais dix fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où le nombre 4 est obtenu.
- Déterminer la loi de X .
 - Pour k entier naturel compris entre 0 et 10, exprimer en fonction de k la probabilité de l'événement $(X = k)$.
 - Donner $P(X = 2)$.
 - Calculer l'espérance de X . Interpréter le résultat obtenu.
 - Calculer $P(X \geq 1)$.
 - Déterminer $P(X \geq 3)$ à la calculatrice.
- 4) Soit n un entier non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux. On note u_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n -ième lancer.
- Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n = 0,6^{n-1} \times 0,4$.
 - Montrer que (u_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.
 - Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, puis étudier la convergence de la suite (S_n) .
 - Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $S_n > 0,999$.