

Exercice 1

5 points

1) (E_1) s'écrit $y' = 2y$. Ses solutions sont les fonctions $x \mapsto C e^{2x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

$f_1(0) = C e^0 = C$, donc $C = 2$:

$$f_1(x) = 2 e^{2x}.$$

2) Les solutions de $(E_2) : y' = y$ sont les fonctions $x \mapsto C e^x$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Si $f_2(x) = C e^x$, alors $f_2'(x) = C e^x$, donc $f_2'(0) = C$. La condition $f_2'(0) = 1$ donne $C = 1$:

$$f_2(x) = e^x.$$

3) Pour tout réel x , $f(x) = 2 e^{2x} - e^x = 2(e^x)^2 - e^x = e^x(2e^x - 1)$.

a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$f'(x) = 4 e^{2x} - e^x = e^x(4e^x - 1).$$

Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $4e^x - 1$:

$$4e^x - 1 > 0 \iff e^x > \frac{1}{4} \iff x > \ln \frac{1}{4} \iff x > -2 \ln 2.$$

Donc f est décroissante sur $] -\infty ; -2 \ln 2]$ et croissante sur $[-2 \ln 2 ; +\infty[$.

b. Valeur du minimum. $e^{-2 \ln 2} = \frac{1}{4}$, donc $f(-2 \ln 2) = 2 \times \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{2}{8} = -\frac{1}{8}$.

Limite en $-\infty$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Limite en $+\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - 1) = +\infty$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	$-2 \ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	0	$-\frac{1}{8}$	$+\infty$

c. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\iff e^x(2e^x - 1) = 0 \\
 &\iff 2e^x - 1 = 0 \quad (\text{car } e^x > 0) \\
 &\iff e^x = \frac{1}{2} \\
 &\iff x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2.
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $S = \{-\ln 2\}$.

Vérification : $f(-\ln 2) = 2 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$. Ce résultat est cohérent avec le tableau : $-\ln 2 > -2 \ln 2$ et f passe de $-\frac{1}{8}$ à $+\infty$ sur $[-2 \ln 2; +\infty[$.

d. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$f''(x) = 8e^{2x} - e^x = e^x(8e^x - 1).$$

$f''(x)$ a le signe de $8e^x - 1$, et $8e^x - 1 > 0 \iff e^x > \frac{1}{8} \iff x > -\ln 8 = -3 \ln 2$.

x	$-\infty$	$-3 \ln 2$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Donc f est concave sur $]-\infty; -3 \ln 2]$ et convexe sur $[-3 \ln 2; +\infty[$.

f'' s'annule en changeant de signe en $-3 \ln 2$: la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse $-3 \ln 2$, d'ordonnée $f(-3 \ln 2) = 2 \times \frac{1}{64} - \frac{1}{8} = -\frac{3}{32}$.

Exercice 2

5 points

- 1) a. Une fonction constante $y = k$ a une dérivée nulle; elle est solution de (E) si et seulement si $0 + 0,04k = 0,8$, soit $k = \frac{0,8}{0,04} = 20$.

La fonction constante $t \mapsto 20$ est solution de (E).

- b. (E) s'écrit $y' = -0,04y + 0,8$. Les solutions de l'équation homogène $y' = -0,04y$ sont les fonctions $t \mapsto C e^{-0,04t}$; on leur ajoute la solution particulière constante :

$$y(t) = C e^{-0,04t} + 20, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- c. $g(0) = C + 20 = 100$ donne $C = 80$:

$$g(t) = 80 e^{-0,04t} + 20.$$

- 2) a. $g(30) = 80 e^{-1,2} + 20 \approx 44,1$. Au bout de 30 minutes, le plat est encore à environ 44°C , au-dessus de 37°C .

(De plus $g'(t) = -3,2 e^{-0,04t} < 0$: la température diminue avec le temps, il faudra donc attendre plus longtemps.)

Non, Théo a sous-estimé le temps d'attente.

b. Pour $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} g(t) = 37 &\iff 80e^{-0,04t} = 17 && \text{(on retranche 20)} \\ &\iff e^{-0,04t} = \frac{17}{80} && \text{(on divise par 80)} \\ &\iff -0,04t = \ln \frac{17}{80} && \text{(on applique } \ln) \\ &\iff t = 25 \ln \frac{80}{17} && \text{(on divise par } -0,04) \end{aligned}$$

La valeur exacte est $t = 25 \ln \frac{80}{17}$ minutes, soit $t \approx 38,720$ min.

Or $0,720 \times 60 \approx 43,2$: il faut attendre environ **38 min 43 s**.

c. Comme g est décroissante, on augmente t de minute en minute tant que la température est strictement supérieure à 30°C .

```
1 from math import exp
2
3 def minute_seuil():
4     t = 0
5     while 80*exp(-0.04*t) + 20 > 30:
6         t = t + 1
7     return t
```

L'appel `minute_seuil()` renvoie 52.

Vérification : $g(51) \approx 30,40 > 30$ et $g(52) \approx 29,99 < 30$; par le calcul, $g(t) = 30 \iff e^{-0,04t} = \frac{1}{8} \iff t = 25 \ln 8 \approx 51,99$.

La température du plat descend à 30°C ou moins à partir de la **52^e minute**.

Exercice 3

5 points

Partie A

1) $RC = 4 \times 10^{-7} \times 2 \times 10^6 = 8 \times 10^{-1} = 0,8$, donc $\frac{1}{RC} = \frac{1}{0,8} = 1,25$.

La relation devient $u'(t) + 1,25u(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$: **u est solution de $y' + 1,25y = 0$** .

2) Les solutions de $y' = -1,25y$ sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-1,25t}$, $C \in \mathbb{R}$. Donc $u(t) = Ce^{-1,25t}$, et $u(0) = C = 5,6$:

$$u(t) = 5,6e^{-1,25t}.$$

3) Pour tout $t \geq 0$, $u'(t) = 5,6 \times (-1,25)e^{-1,25t} = -7e^{-1,25t} < 0$.

u est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

C'était prévisible : le condensateur se décharge dans le conducteur ohmique, la tension à ses bornes diminue.

Partie B

1) a. Perdre 63 % revient à multiplier par $1 - 0,63 = 0,37$: $5,6 \times 0,37 = \boxed{2,072 \text{ V}}$.

b. Pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} 5,6 e^{-1,25t} &= 2,072 \iff e^{-1,25t} = \frac{2,072}{5,6} = 0,37 \\ &\iff -1,25t = \ln 0,37 \\ &\iff t = -0,8 \ln 0,37 = 0,8 \ln \frac{100}{37}. \end{aligned}$$

L'unique solution est $t = 0,8 \ln \frac{100}{37} \approx 0,795$ (elle est bien dans $]0; +\infty[$ car $\frac{100}{37} > 1$).

c. Environ 0,8 seconde après la charge du condensateur, la tension a perdu 63 % de sa valeur initiale : le stimulateur envoie alors une impulsion.

Il y a une impulsion environ toutes les 0,8 s.

2) Une impulsion toutes les 0,8 s correspond à $\frac{60}{0,8} = 75$ impulsions, donc 75 battements par minute (on le lit aussi sur le graphique : 3 battements en 2,4 s).

Comme $50 \leq 75 \leq 80$, ce rythme correspond à celui d'un adulte au repos en bonne santé.

Exercice 4

5 points

Partie A : modèle de Malthus

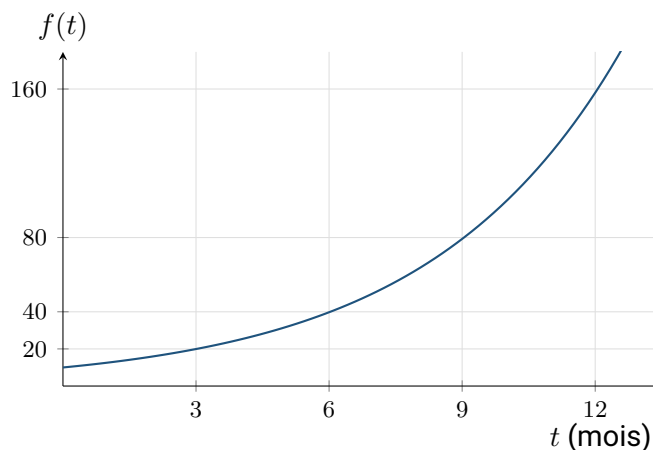
1) Les solutions de (E_1) : $y' = ay$ sont les fonctions $t \mapsto C e^{at}$. Avec $f(0) = 10$: $C = 10$, donc $f(t) = 10 e^{at}$.

La population double en trois mois : $f(3) = 20$, soit

$$10 e^{3a} = 20 \iff e^{3a} = 2 \iff 3a = \ln 2 \iff a = \frac{\ln 2}{3}.$$

Donc $f(t) = 10 e^{\frac{\ln 2}{3}t}$ (que l'on peut aussi écrire $f(t) = 10 \times 2^{t/3}$).

2) $a = \frac{\ln 2}{3} \approx 0,23$, d'où $f(t) \approx 10 e^{0,23t}$. Quelques valeurs : $f(3) \approx 20$, $f(6) \approx 40$, $f(9) \approx 79$, $f(12) \approx 158$.



Partie B : modèle de Verhulst

g est exprimée en milliers de lapins : la capacité maximale de 1 000 lapins correspond à $M = 1$, et la population initiale de 10 lapins à $g(0) = 0,01$. Avec $a = 0,05$, l'équation est

$$(E_2) : y' = 0,05 y (1 - y).$$

1) Soit y une fonction dérivable qui ne s'annule pas, et $z = \frac{1}{y}$ (donc $y = \frac{1}{z}$). On a $z' = -\frac{y'}{y^2}$.

$$\begin{aligned} y' = 0,05 y (1 - y) &\iff -\frac{y'}{y^2} = -\frac{0,05 y (1 - y)}{y^2} \quad (\text{on divise par } -y^2 \neq 0) \\ &\iff z' = -0,05 \left(\frac{1}{y} - 1 \right) \\ &\iff z' = -0,05 z + 0,05 \\ &\iff z' + 0,05 z = 0,05. \end{aligned}$$

Ainsi y est solution de $(E_2) \iff z = \frac{1}{y}$ est solution de (E_3) .

2) La fonction constante 1 est solution de (E_3) (car $0,05 \times 1 = 0,05$), et les solutions de $z' = -0,05 z$ sont les $t \mapsto C e^{-0,05t}$. Donc les solutions de (E_3) sont

$$z(t) = 1 + C e^{-0,05t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Pour $g : z(0) = \frac{1}{g(0)} = \frac{1}{0,01} = 100$, donc $1 + C = 100$ et $C = 99$. Comme $z(t) = 1 + 99 e^{-0,05t} > 0$ ne s'annule pas,

$$g(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{1 + 99 e^{-0,05t}}.$$

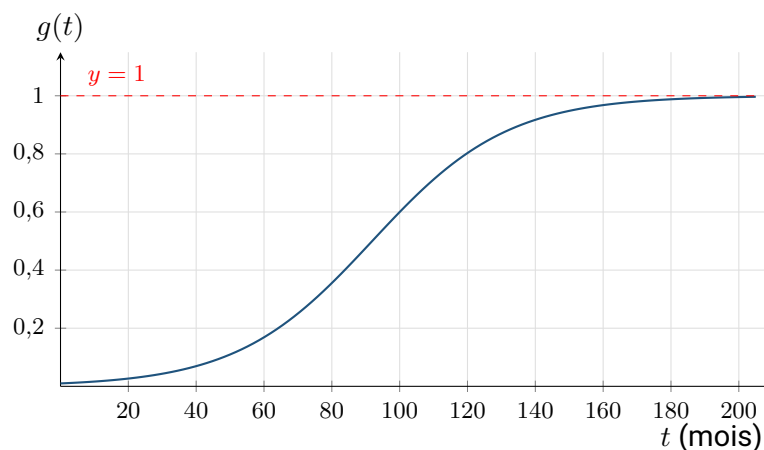
3) Variations. $g = \frac{1}{z}$ avec $z(t) = 1 + 99 e^{-0,05t}$ et $z'(t) = -4,95 e^{-0,05t}$, donc

$$g'(t) = -\frac{z'(t)}{z(t)^2} = \frac{4,95 e^{-0,05t}}{(1 + 99 e^{-0,05t})^2} > 0.$$

g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Limite. $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,05t} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 1$: la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe ; la population se rapproche de 1 000 lapins sans la dépasser.

t	0	$+\infty$
$g'(t)$	+	
g	0,01	1



4) 90 % de la capacité maximale correspond à 0,9 millier de lapins. Pour $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 g(t) = 0,9 &\iff 1 + 99e^{-0,05t} = \frac{1}{0,9} = \frac{10}{9} \\
 &\iff 99e^{-0,05t} = \frac{1}{9} \\
 &\iff e^{-0,05t} = \frac{1}{891} \\
 &\iff -0,05t = -\ln 891 \\
 &\iff t = 20 \ln 891.
 \end{aligned}$$

g étant croissante, l'alerte se déclenche à l'instant $t = 20 \ln 891 \approx 135,8$ mois, c'est-à-dire au cours du 136^e mois, soit environ 11 ans et 4 mois après l'introduction des lapins.