

Calculatrice autorisée

Exercice 1

5 points

On considère les équations différentielles $(E_1) : y' - 2y = 0$ et $(E_2) : y' = y$.

- 1) Déterminer la solution f_1 de (E_1) telle que $f_1(0) = 2$.
- 2) Déterminer la solution f_2 de (E_2) telle que $f_2'(0) = 1$.
- 3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.
Rappel : $e^{2x} = (e^x)^2$. Les résultats seront exprimés en fonction de $\ln 2$.
 - a. Étudier les variations de la fonction f .
 - b. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f .
 - c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
 - d. Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

5 points

Théo sort un gratin du four, le plat étant alors à 100°C . La cuisine est supposée à température ambiante de 20°C . Théo pense qu'il pourra toucher le plat sans risque lorsque celui-ci sera à 37°C et qu'il lui suffit d'attendre 30 minutes pour cela.

La température du plat, en $^\circ\text{C}$, est donnée par une fonction g du temps t , exprimé en minutes, qui est solution de l'équation différentielle

$$(E) : y' + 0,04y = 0,8.$$

- 1)
 - a. Trouver une fonction constante solution de (E) .
 - b. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) .
 - c. Donner la solution g vérifiant la condition initiale $g(0) = 100$.
- 2) En utilisant l'expression de $g(t)$ trouvée, répondre aux questions suivantes.
 - a. Théo a-t-il bien évalué le temps nécessaire pour atteindre 37°C ?
 - b. Quelle est la valeur exacte du temps nécessaire pour obtenir cette température ?
 En donner ensuite une valeur approchée arrondie à la seconde près.
 - c. Écrire un algorithme qui permet de trouver la minute à partir de laquelle le plat est à une température de 30°C . Programmer cet algorithme et répondre au problème.

Exercice 3

5 points

Le stimulateur cardiaque est un appareil destiné à certaines personnes dont le rythme du cœur est devenu trop lent. Implanté sous la peau, l'appareil envoie des impulsions électriques régulières au cœur lorsque le rythme cardiaque est insuffisant. Un stimulateur cardiaque est composé de deux composants :

- un condensateur de capacité C égale à 4×10^{-7} farad ;
- un conducteur ohmique de résistance R égale à 2×10^6 ohms.

Une fois le condensateur chargé, la tension à ses bornes est égale à 5,6 volts. Il se décharge ensuite dans le conducteur ohmique.

Partie A

La tension, en volts, aux bornes du condensateur est une fonction u du temps t , en secondes. On admet que $u(0) = 5,6$ et que cette fonction u , définie et dérivable sur $[0; +\infty[$, vérifie la relation

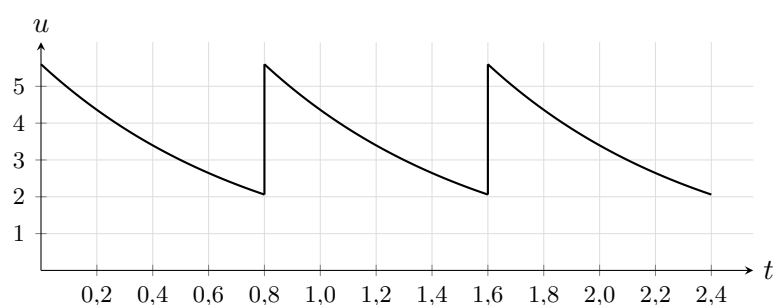
$$u'(t) + \frac{1}{RC} u(t) = 0.$$

- 1) Vérifier que la fonction u est solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle $y' + 1,25y = 0$.
- 2) Montrer que, pour tout réel t de $[0; +\infty[$, on a $u(t) = 5,6 e^{-1,25t}$.
- 3) Étudier le sens de variation de la fonction u sur $[0; +\infty[$. Ce résultat était-il prévisible ?

Partie B

En réalité, lorsque la tension aux bornes du condensateur a perdu 63 % de sa valeur initiale $u(0)$, le stimulateur cardiaque envoie une impulsion électrique au cœur, ce qui provoque un battement. On considère que le condensateur se recharge instantanément et que la tension mesurée à ses bornes est alors à nouveau égale à 5,6 volts.

- 1)
 - a. Vérifier que la tension aux bornes du condensateur qui déclenche l'envoi d'une impulsion électrique au cœur est de 2,072 volts.
 - b. Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$ l'équation $5,6 e^{-1,25t} = 2,072$.
 - c. Interpréter le résultat trouvé.
- 2) Chez l'adulte en bonne santé, le pouls au repos se situe entre 50 et 80 pulsations par minute. On admet que le stimulateur cardiaque d'un patient souffrant d'insuffisance cardiaque envoie une impulsion électrique au cœur toutes les 0,8 seconde. La tension aux bornes du condensateur évolue alors comme ci-dessous.



Ce rythme correspond-il à celui d'un adulte au repos et en bonne santé ? Justifier la réponse.

Exercice 4

5 points

Partie A : modèle de Malthus

L'économiste anglais Thomas Malthus (1766-1844) constate qu'on peut modéliser l'évolution d'une population en supposant que la vitesse d'accroissement est proportionnelle à cette population.

Si f est la fonction qui associe à l'instant t (exprimé en mois) la population, alors elle vérifie l'équation différentielle $(E_1) : y' = ay$, où a est le coefficient de proportionnalité.

- 1) Déterminer la fonction f pour une population de 10 lapins introduite sur une île, sachant que cette population double au bout de trois mois.
- 2) Arrondir les coefficients à 10^{-2} et représenter f .

Partie B : modèle de Verhulst

Le modèle de Malthus n'est pas réaliste : à long terme, l'espace restreint ou la quantité de nourriture disponible freinent l'accroissement de la population.

Le modèle de Verhulst est basé sur l'hypothèse que la vitesse d'accroissement est proportionnelle d'une part à l'effectif de la population, d'autre part à l'écart entre cet effectif et un nombre M représentant l'effectif maximal qui peut apparaître au sein de cette population.

La fonction g qui donne la population (en milliers de lapins) à l'instant t (en mois) vérifie alors l'équation différentielle, dite logistique :

$$(E_2) : y' = a y (M - y).$$

On introduit toujours une population de 10 lapins sur l'île. De plus, on suppose ici que l'île ne peut contenir plus de 1 000 lapins, et que $a = 0,05$.

- 1) On pose $z = \frac{1}{y}$, où y est une solution de (E_2) qui ne s'annule pas.

Montrer que résoudre l'équation (E_2) est équivalent à résoudre l'équation (E_3) suivante :

$$(E_3) : z' + 0,05 z = 0,05.$$

- 2) Résoudre l'équation différentielle (E_3) , puis montrer que $g(t) = \frac{1}{1 + 99 e^{-0,05t}}$.
- 3) Étudier la fonction g sur $[0; +\infty[$ et représenter g : on obtient la courbe logistique.
- 4) On a fixé un seuil d'alerte sur l'île lorsque la population de lapins atteint 90 % de la capacité maximale.
Déterminer l'instant où l'alerte se déclenchera.