

Exercice 1

6 points

Dans le repère $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$, on a $B(0;0;0)$, $C(1;0;0)$, $D(0;1;0)$ et $A(0;0;1)$.

- 1) L'égalité $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{II'} = \overrightarrow{I'B}$ signifie que I et I' partagent le segment $[AB]$ en trois parts égales :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Comme $\overrightarrow{AB}(0;0;-1)$, on obtient $I\left(0;0;1-\frac{1}{3}\right)$ et $I'\left(0;0;1-\frac{2}{3}\right)$.

De même, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AJ'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ avec $\overrightarrow{AC}(1;0;-1)$, et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AK'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ avec $\overrightarrow{AD}(0;1;-1)$. D'où :

$$\boxed{I\left(0;0;\frac{2}{3}\right)} \quad \boxed{I'\left(0;0;\frac{1}{3}\right)} \quad \boxed{J\left(\frac{1}{3};0;\frac{2}{3}\right)} \quad \boxed{J'\left(\frac{2}{3};0;\frac{1}{3}\right)} \quad \boxed{K\left(0;\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)} \quad \boxed{K'\left(0;\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)}$$

- 2) a. La droite (CI) passe par $C(1;0;0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{CI}\left(-1;0;\frac{2}{3}\right)$. Un point $M(x;y;z)$ appartient à (CI) si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CI}$, soit :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = \frac{2}{3}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

La droite (BJ') passe par l'origine B et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BJ'}\left(\frac{2}{3};0;\frac{1}{3}\right)$: $M \in (BJ')$ si et seulement s'il existe un réel u tel que $\overrightarrow{BM} = u\overrightarrow{BJ'}$, soit :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}u \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{3}u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}.$$

- b. Le point E appartient aux deux droites : on cherche t et u tels que

$$\begin{cases} 1 - t = \frac{2}{3}u \\ 0 = 0 \\ \frac{2}{3}t = \frac{1}{3}u \end{cases} \iff \begin{cases} u = 2t \\ 1 - t = \frac{4}{3}t \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{3}{7} \\ u = \frac{6}{7} \end{cases}$$

Avec $t = \frac{3}{7}$ dans la représentation de (CI) : $x = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$, $y = 0$, $z = \frac{2}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$.

$$\boxed{E\left(\frac{4}{7};0;\frac{2}{7}\right)}$$

Vérification avec $u = \frac{6}{7}$ dans (BJ') : $x = \frac{2}{3} \times \frac{6}{7} = \frac{4}{7}$ et $z = \frac{1}{3} \times \frac{6}{7} = \frac{2}{7}$.

- 3) La droite (BK) passe par B , de vecteur directeur $\overrightarrow{BK} \left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$; la droite (DI') passe par $D(0; 1; 0)$, de vecteur directeur $\overrightarrow{DI'} \left(0; -1; \frac{1}{3}\right)$:

$$(BK) : \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{3}v \\ z = \frac{2}{3}v \end{cases} \quad v \in \mathbb{R} \quad (DI') : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - w \\ z = \frac{1}{3}w \end{cases} \quad w \in \mathbb{R}.$$

On résout :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}v = 1 - w \\ \frac{2}{3}v = \frac{1}{3}w \end{cases} \iff \begin{cases} w = 2v \\ \frac{1}{3}v = 1 - 2v \end{cases} \iff \begin{cases} v = \frac{3}{7} \\ w = \frac{6}{7} \end{cases}$$

D'où $y = \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$ et $z = \frac{2}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$:

$$\boxed{G \left(0; \frac{1}{7}; \frac{2}{7}\right)}$$

Vérification avec $w = \frac{6}{7}$: $y = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$ et $z = \frac{1}{3} \times \frac{6}{7} = \frac{2}{7}$.

- 4) Les points E, F et G ne sont pas alignés : $\overrightarrow{EF} \left(-\frac{3}{7}; \frac{4}{7}; 0\right)$ et $\overrightarrow{EG} \left(-\frac{4}{7}; \frac{1}{7}; 0\right)$ ne sont pas colinéaires (si $\overrightarrow{EG} = k\overrightarrow{EF}$, la première coordonnée donne $k = \frac{4}{3}$ et la deuxième $k = \frac{1}{4}$). Ils définissent donc bien un plan.

- Le plan (BCD) est dirigé par $\overrightarrow{BC}(1; 0; 0)$ et $\overrightarrow{BD}(0; 1; 0)$.
- $\overrightarrow{EF} = -\frac{3}{7}\overrightarrow{BC} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EG} = -\frac{4}{7}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{7}\overrightarrow{BD}$.

Les deux vecteurs directeurs non colinéaires $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ du plan (EFG) sont des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$: les plans (EFG) et (BCD) sont donc parallèles.

De plus, E n'appartient pas au plan (BCD) : les points de (BCD) ont tous une cote nulle (ils s'écrivent $B + a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{BD}$), alors que E a pour cote $\frac{2}{7} \neq 0$.

Les plans (EFG) et (BCD) sont strictement parallèles.

Remarque : E, F et G ont la même cote $\frac{2}{7}$; le plan (EFG) est le plan d'équation $z = \frac{2}{7}$, « parallèle à la base » BCD du tétraèdre.

Exercice 2

9 points

- 1) a. La fonction $\ln$ est dérivable en 1, de nombre dérivé $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$. Par définition du nombre dérivé, le taux d'accroissement de $\ln$ entre 1 et $1+h$ tend vers $\ln'(1)$:

$$\frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \frac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \ln'(1) = 1, \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1}.$$

- b. Pour tout réel x , $f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$. On pose $h = e^x$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, et d'après la question précédente $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Par composition :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1}.$$

- c. Pour tout réel x , $1 + e^x = e^x (e^{-x} + 1)$, donc :

$$\ln(1 + e^x) = \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x}) = x + \ln(1 + e^{-x}).$$

En multipliant par e^{-x} :

$$f(x) = x e^{-x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) = \boxed{\frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x})}.$$

- d. • Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.
• $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x}) = 1$ et, par continuité de $\ln$ en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = \ln 1 = 0.$$

$$\text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) = 0.$$

$$\text{Par somme : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}.$$

- e. D'après 1)b. et 1)d., la courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes horizontales :

$$\boxed{y = 1 \text{ en } -\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{y = 0 \text{ en } +\infty}.$$

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$: il n'y a pas d'asymptote verticale.

- 2) a. g est dérivable sur $[0; +\infty[$ (quotient et composée de fonctions dérivables, avec $1+t > 0$). Pour tout $t \geq 0$:

$$g'(t) = \frac{1 \times (1+t) - t \times 1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1+t}{(1+t)^2} = \boxed{-\frac{t}{(1+t)^2}}.$$

Pour $t > 0$, $-t < 0$ et $(1+t)^2 > 0$, donc $g'(t) < 0$; g' ne s'annule qu'en $t = 0$.

Ainsi $\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } [0; +\infty[}$.

b. $g(0) = \frac{0}{1} - \ln 1 = 0$. Comme g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, pour tout $t > 0$, $g(t) < g(0) = 0$.

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g(t) < 0 \quad \text{pour tout } t > 0.$$

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions dérivables; $1 + e^x > 0$). On pose $U(x) = e^{-x}$, $U'(x) = -e^{-x}$, et $V(x) = \ln(1 + e^x)$, $V'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x} \ln(1 + e^x) + e^{-x} \times \frac{e^x}{1 + e^x} \\ &= e^{-x} \left(\frac{e^x}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x) \right). \end{aligned}$$

On reconnaît g évaluée en $t = e^x$: $f'(x) = e^{-x} g(e^x)$.

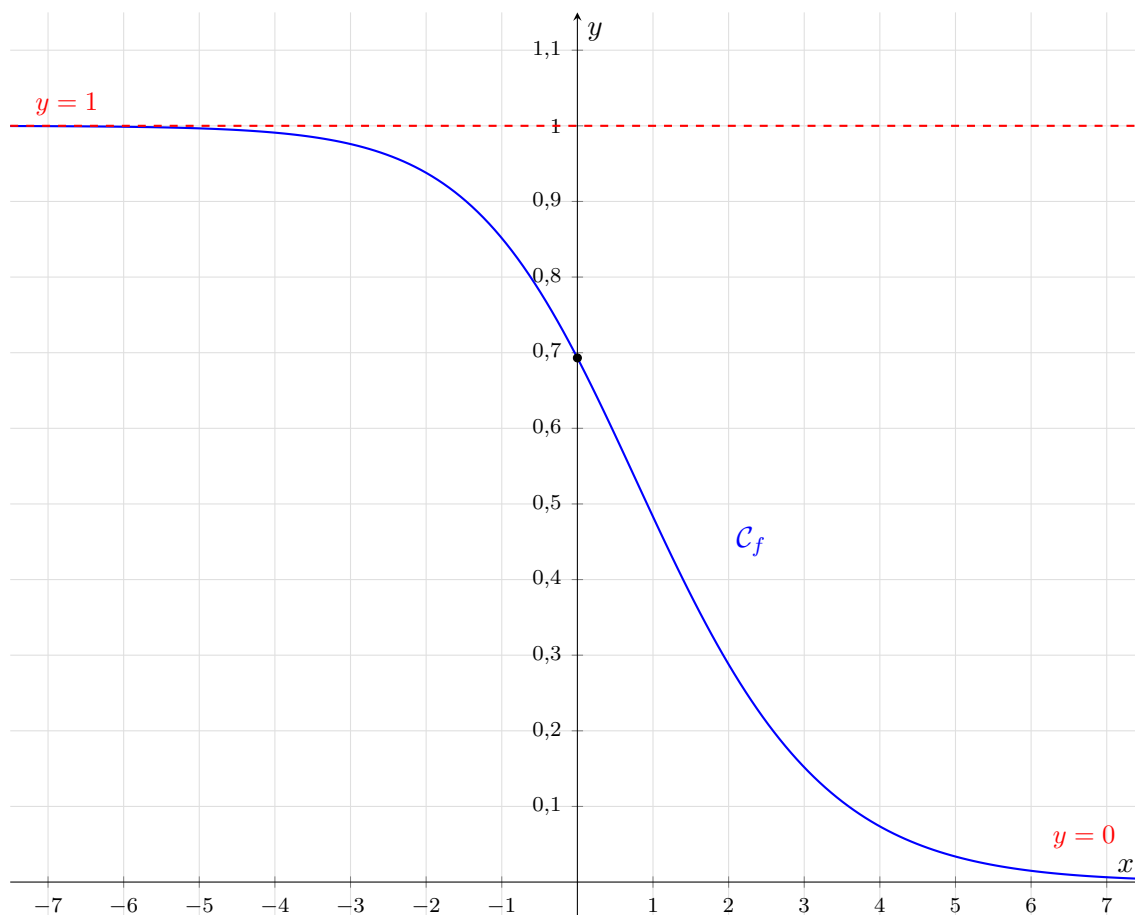
Pour tout réel x , $e^x > 0$ donc, d'après 2)b., $g(e^x) < 0$; et $e^{-x} > 0$. Ainsi $f'(x) < 0$ pour tout réel x :

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—		
f	1	$\ln 2$	0

($f(0) = e^0 \ln(1 + 1) = \ln 2$: valeur intermédiaire utile pour le tracé.)

4) Quelques valeurs pour le tracé (à titre indicatif) : $f(0) = \ln 2 \approx 0,69$, $f(-2) \approx 0,94$, $f(2) \approx 0,29$, $f(4) \approx 0,07$.



L'asymptote $y = 0$ en $+\infty$ est l'axe des abscisses; $y = 1$ est l'asymptote en $-\infty$ (en pointillés).

Exercice 3

5 points

- 1) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-1 \\ -5-(-2) \\ -2-1 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$, est un vecteur directeur de Δ , qui passe par $A(1; -2; 1)$:

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- 2) Un vecteur directeur de Δ' est $\vec{u}' \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires : si $\overrightarrow{AB} = k \vec{u}'$, la première coordonnée donne $k = -2$ et la troisième $k = -3$. Les droites Δ et Δ' ne sont donc pas parallèles.

- Cherchons un point commun : on résout

$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 - t' \\ -2 - 3t = 1 + 2t' \\ 1 - 3t = t' \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + 2t = 2 - (1 - 3t) \\ -2 - 3t = 1 + 2(1 - 3t) \\ t' = 1 - 3t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ 3t = 5 \\ t' = 1 - 3t \end{cases}$$

La première équation donne $t = 0$ et la deuxième $t = \frac{5}{3}$: c'est impossible. Le système n'a pas de solution, Δ et Δ' n'ont aucun point commun.

Deux droites ni parallèles ni sécantes ne sont pas coplanaires :

Δ et Δ' ne sont pas coplanaires.

- 3) a. $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$. S'ils étaient colinéaires, on aurait $\overrightarrow{CE} = k \overrightarrow{CD}$; la première coordonnée donne $k = -\frac{1}{2}$ et la deuxième $k = \frac{9}{7}$: impossible.
Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ ne sont pas colinéaires, donc les points C, D, E ne sont pas alignés : ils définissent un plan $\mathcal{P}$.

- b. $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ n'étant pas colinéaires, les trois vecteurs sont coplanaires si et seulement s'il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{AB} = a \overrightarrow{CD} + b \overrightarrow{CE}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 2a - b = 2 \\ 7a + 9b = -3 \\ -3a - b = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} 5a = 5 \quad (L_1 - L_3) \\ 7a + 9b = -3 \\ b = 2a - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ 7 = -3 \\ b = 0 \end{cases}$$

La deuxième ligne est fautive : le système n'a pas de solution.

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ ne sont pas coplanaires.

- c. $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ forment un couple de vecteurs directeurs du plan $\mathcal{P}$. La droite Δ serait parallèle à $\mathcal{P}$ si son vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ était une combinaison linéaire de $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$; d'après la question précédente, ce n'est pas le cas.

La droite Δ n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}$: elle le coupe en un unique point.

Remarque : ce point est B . En effet, $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{7}{5} \overrightarrow{CD} - \frac{6}{5} \overrightarrow{CE}$ (vérification : $\frac{7}{5} \times 2 + \frac{6}{5} = 4$, $\frac{7}{5} \times 7 - \frac{6}{5} \times 9 = -1$, $\frac{7}{5} \times (-3) + \frac{6}{5} = -3$), donc $B \in \mathcal{P}$; comme $B \in \Delta$, on a $\Delta \cap \mathcal{P} = \{B\}$.