

Calculatrice interdite

Exercice 1

6 points

Soit $ABCD$ un tétraèdre de l'espace. Les points I, I', J, J', K et K' sont définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{II'} = \overrightarrow{I'B}; \quad \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JJ'} = \overrightarrow{J'C} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KK'} = \overrightarrow{K'D}.$$

On note de plus E le point d'intersection des droites (CI) et (BJ') , F celui des droites (DJ) et (CK') et G celui des droites (BK) et (DI') .

Le but de l'exercice est d'étudier la position relative des plans (BCD) et (EFG) .

On munit l'espace du repère $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$.

- 1) Déterminer les coordonnées des points I, I', J, J', K et K' .
- 2) a. Justifier que les droites (CI) et (BJ') admettent respectivement pour représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = \frac{2}{3}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3}u \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{3}u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}.$$

b. En déduire les coordonnées du point E .

- 3) Déterminer les coordonnées du point G .

- 4) On admet que le point F a pour coordonnées $\left(\frac{1}{7}; \frac{4}{7}; \frac{2}{7}\right)$.

Déterminer la position relative des plans (BCD) et (EFG) .

Exercice 2

9 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées.

- 1) a. Rappeler pourquoi $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$.
- b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
- c. Vérifier que, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x}).$$

d. En déduire la limite de f en $+\infty$.

e. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des asymptotes ? Si oui, les donner.

2) Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t).$$

a. Montrer que g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

b. En déduire le signe de g sur $[0; +\infty[$.

3) Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

4) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ et ses éventuelles asymptotes.

Exercice 3

5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit Δ la droite passant par les points $A(1; -2; 1)$ et $B(3; -5; -2)$.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

2) On note Δ' la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites Δ et Δ' ne sont pas coplanaires.

3) On considère les points $C(-1; -4; 1)$, $D(1; 3; -2)$ et $E(-2; 5; 0)$.

a. Montrer que les points C , D et E définissent un plan, que l'on notera $\mathcal{P}$.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.

c. Que peut-on en déduire concernant la position relative de la droite Δ et du plan $\mathcal{P}$?