

Exercice 1

11 points

Partie A : étude d'une fonction

1) Pour tout $x \geq 0$, on développe :

$$f(x) = 20x e^{-\frac{1}{2}x} + 10 e^{-\frac{1}{2}x} = 40 \times \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} + 10 e^{-\frac{x}{2}}.$$

On pose $X = \frac{x}{2}$: quand $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow +\infty$.

- Par croissances comparées, $\lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 40 \times \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} = 0$.
- $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 10 e^{-\frac{x}{2}} = 0$.

Par somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

La courbe $\mathcal{C}$ admet donc en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses).

2) $f = u \times v$ avec $u(x) = 20x + 10$, $u'(x) = 20$, et $v(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$, $v'(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}$ (dérivée de e^w : $w'e^w$).

Comme $(uv)' = u'v + uv'$, pour tout $x \geq 0$:

$$f'(x) = 20 e^{-\frac{1}{2}x} + (20x + 10) \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}x} = (20 - 10x - 5) e^{-\frac{1}{2}x},$$

soit

$$f'(x) = (15 - 10x) e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Pour tout x , $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$: $f'(x)$ est du signe de $15 - 10x$, qui s'annule en $x = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$, est positif avant et négatif après.

On calcule $f(0) = 10 \times e^0 = 10$ et $f\left(\frac{3}{2}\right) = (30 + 10) e^{-\frac{3}{4}} = 40 e^{-\frac{3}{4}} \approx 18,89$.

x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$15 - 10x$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	10	$40 e^{-\frac{3}{4}}$	0

3) Sur $\left]0; \frac{3}{2}\right]$: f est strictement croissante et $f(0) = 10$, donc pour tout $x \in \left]0; \frac{3}{2}\right]$, $f(x) > f(0) = 10$. L'équation $f(x) = 10$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

Sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[:$

- f est continue (car dérivable) et strictement décroissante;

- $f\left(\frac{3}{2}\right) = 40e^{-\frac{3}{4}} \approx 18,89 > 10$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 < 10$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution α sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

Finalement, l'équation $f(x) = 10$ admet **une unique solution** α dans $]0; +\infty[$.

À la calculatrice : $f(4,67) \approx 10,010 > 10$ et $f(4,68) \approx 9,980 < 10$, donc $4,67 < \alpha < 4,68$ et

$\alpha \approx 4,67$ à 10^{-2} près.

4) Pour tout x , $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$: $f''(x)$ est du signe de $5x - 17,5$, qui s'annule en $x = \frac{17,5}{5} = 3,5$.

x	0	3,5	$+\infty$
$5x - 17,5$	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+
convexité	concave		convexe

- $f''(x) \leq 0$ sur $[0; 3,5]$: f est concave sur $[0; 3,5]$;

- $f''(x) \geq 0$ sur $[3,5; +\infty[$: f est convexe sur $[3,5; +\infty[$.

f'' s'annule et change de signe en 3,5 : la courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion d'abscisse 3,5. Son ordonnée est $f(3,5) = (70 + 10)e^{-1,75} = 80e^{-1,75}$:

$I(3,5; 80e^{-1,75})$ avec $80e^{-1,75} \approx 13,90$.

Bonus. D'après la question 2), pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{2}f(x) &= (15 - 10x)e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}(20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x} \\ &= (15 - 10x + 10x + 5)e^{-\frac{1}{2}x} \\ &= 20e^{-\frac{1}{2}x}. \end{aligned}$$

Donc

f est solution de l'équation différentielle (E).

Partie B : température d'une réaction chimique

1) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0 :$

à long terme, la température de la réaction se rapproche de 0°C .

- 2) D'après le tableau de variations, f atteint son maximum en $t = \frac{3}{2} = 1,5$: la température maximale est

$$f(1,5) = 40 e^{-\frac{3}{4}} \approx 18,9^\circ\text{C},$$

atteinte au bout de 1,5 h, soit 1 h et $0,5 \times 60 = 30$ min : au bout de 1 h 30 min.

- 3) On cherche l'instant $t > 0$ tel que $f(t) = f(0) = 10$: d'après la question 3) de la partie A, c'est $t = \alpha$.

Plus précisément, $f(4,673) \approx 10,001 > 10$ et $f(4,674) \approx 9,998 < 10$, donc $4,673 < \alpha < 4,674$.

Or $0,673 \times 60 = 40,38$ et $0,674 \times 60 = 40,44$: dans les deux cas on arrondit à 40 min. La température redescend à sa valeur initiale

au bout de 4 h 40 min environ.

- 4) La température décroît sur $[1,5; +\infty[$, et sa vitesse de variation est $f'(t) < 0$.

- Sur $[1,5; 3,5]$, f est concave : f' est décroissante, donc $f'(t)$ est de plus en plus négatif ; la température diminue *de plus en plus vite*.
- Sur $[3,5; +\infty[$, f est convexe : f' est croissante (tout en restant négative), donc $|f'(t)|$ diminue ; la température diminue *de moins en moins vite*.

Le changement se produit au point d'inflexion, en $t = 3,5$ h, soit au bout de 3 h 30 min.

C'est à cet instant que la température baisse le plus vite : $f'(3,5) = -20 e^{-1,75} \approx -3,48^\circ\text{C}$ par heure.

Exercice 2

9 points

1) a. $\vec{OA} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{OB} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 10 \times 1 + 0 \times 7 + 1 \times 1 = 11.$$

Comme $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 11 \neq 0$, les vecteurs ne sont pas orthogonaux :

les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.

b. $OA = \sqrt{10^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{101}$ et $OB = \sqrt{1^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{51}$.

Or $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos \widehat{AOB}$, donc

$$\cos \widehat{AOB} = \frac{11}{\sqrt{101} \times \sqrt{51}} = \frac{11}{\sqrt{5151}} \approx 0,1533.$$

À la calculatrice (en mode degré) : $\widehat{AOB} \approx 81,2^\circ$.

- 2) Les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ ne sont pas colinéaires (la deuxième coordonnée de $\vec{OA}$ est nulle, pas celle de $\vec{OB}$, alors que leurs troisièmes coordonnées sont égales) : les points O , A et B définissent bien un plan.

On vérifie que leurs coordonnées satisfont l'équation $7x + 9y - 70z = 0$:

- $O : 7 \times 0 + 9 \times 0 - 70 \times 0 = 0$;
- $A : 7 \times 10 + 9 \times 0 - 70 \times 1 = 70 - 70 = 0$;
- $B : 7 \times 1 + 9 \times 7 - 70 \times 1 = 7 + 63 - 70 = 0$.

Les trois points appartiennent au plan d'équation $7x + 9y - 70z = 0$, donc

$$7x + 9y - 70z = 0 \text{ est une équation du plan } (OAB).$$

- 3) La droite (CA) passe par $C(0; 0; 5)$ et a pour vecteur directeur $\vec{CA} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 10t \\ y = 0 \\ z = 5 - 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vérification : $t = 0$ donne C , $t = 1$ donne $A(10; 0; 1)$.

- 4) D est le milieu de $[OC]$: $D \left(0; 0; \frac{5}{2} \right)$.

$\mathcal{P}$ est parallèle à (OAB) : il a le même vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -70 \end{pmatrix}$, donc une équation de la forme

$$7x + 9y - 70z + d = 0.$$

$$D \in \mathcal{P} : 7 \times 0 + 9 \times 0 - 70 \times \frac{5}{2} + d = 0, \text{ soit } -175 + d = 0 \text{ et } d = 175.$$

$$\mathcal{P} : 7x + 9y - 70z + 175 = 0.$$

- 5) Un point $M(10t; 0; 5 - 4t)$ de (CA) appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si

$$\begin{aligned} & 7 \times 10t + 9 \times 0 - 70(5 - 4t) + 175 = 0 \\ \iff & 70t - 350 + 280t + 175 = 0 \\ \iff & 350t = 175 \\ \iff & t = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Avec $t = \frac{1}{2}$: $F(5; 0; 3)$ (c'est le milieu de $[CA]$).

$$\text{Ensuite, } \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 5 - \frac{1}{2} \\ 0 - \frac{7}{2} \\ 3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 - 10 \\ 7 - 0 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $\overrightarrow{AB} = -2 \overrightarrow{EF}$: les vecteurs sont colinéaires, donc

les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

(Les droites sont même strictement parallèles : E a pour cote 3, alors que tous les points de (AB) ont pour cote 1.)

6) H appartient au plan (OAB) :

$$7 \times \frac{245}{503} + 9 \times \frac{315}{503} - 70 \times \frac{65}{503} = \frac{1\,715 + 2\,835 - 4\,550}{503} = 0.$$

(CH) est orthogonale au plan (OAB) :

$$\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} \frac{245}{503} \\ \frac{315}{503} \\ \frac{65}{503} - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{245}{503} \\ \frac{315}{503} \\ -\frac{2\,450}{503} \end{pmatrix} = \frac{35}{503} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -70 \end{pmatrix} = \frac{35}{503} \vec{n}.$$

$\overrightarrow{CH}$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}$ du plan (OAB) . Ainsi

H est le projeté orthogonal de C sur le plan (OAB) .

La distance du point C au plan (OAB) est donc la longueur CH :

$$CH = \frac{35}{503} \times \|\vec{n}\| = \frac{35}{503} \sqrt{7^2 + 9^2 + (-70)^2} = \frac{35}{503} \sqrt{5\,030},$$

soit

$$CH = \frac{35\sqrt{5\,030}}{503} \approx 4,93.$$