

Calculatrice autorisée

Exercice 1

11 points

Partie A : étude d'une fonction

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = (20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

- 1) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$. Donner l'équation d'une éventuelle asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
- 2) Déterminer f' , la fonction dérivée de f , puis dresser le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$.
- 3) Justifier que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0; +\infty[$.
Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de α .
- 4) On admet que f'' , la fonction dérivée seconde de f , est définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f''(x) = (5x - 17,5)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Étudier la convexité de f sur $[0; +\infty[$, puis en déduire l'existence d'un éventuel point d'inflexion pour $\mathcal{C}$.

Bonus (hors barème) : démontrer que f est solution de l'équation différentielle

$$(E) : y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Partie B : étude de la température d'une réaction chimique

On note $f(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t , t étant exprimé en heures et f étant la fonction étudiée dans la **partie A**. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $f(0) = 10$.

- 1) Interpréter concrètement le résultat de la question 1) de la partie A.
- 2) Quelle est la température maximale atteinte par la réaction chimique? À quel instant, arrondi à la minute, cette température maximale est-elle atteinte?
- 3) Au bout de combien de temps, arrondi à la minute, la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale?
- 4) Lors de la phase de décroissance de la température, il existe un instant à partir duquel la température diminue de moins en moins vite. Quel est cet instant, arrondi à la minute?

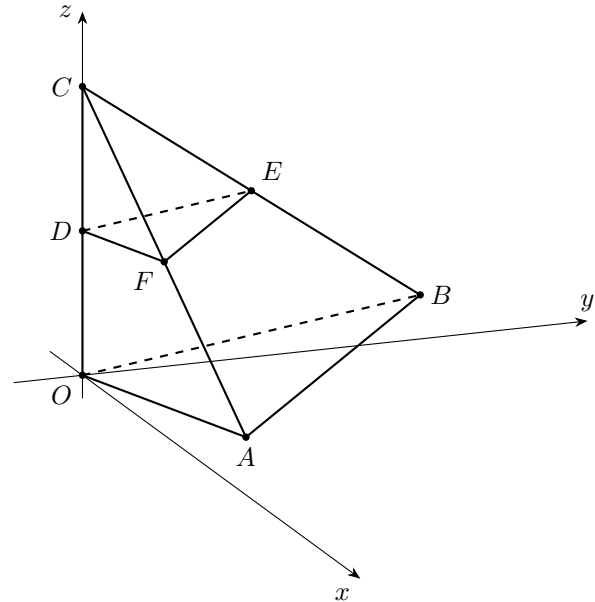
Exercice 2

9 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(10; 0; 1)$, $B(1; 7; 1)$ et $C(0; 0; 5)$.

La figure ci-contre illustre la situation; les points D , E et F sont définis dans les questions 4) et 5).



- 1) a. Démontrer que les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.
b. Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{AOB}$, arrondie au dixième.
- 2) Vérifier que $7x + 9y - 70z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB) .
- 3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CA) .
- 4) Soit D le milieu du segment $[OC]$. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ parallèle au plan (OAB) passant par D .
- 5) Le plan $\mathcal{P}$ coupe la droite (CB) en E et la droite (CA) en F . On admet que le point E a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}; 3\right)$.
Déterminer les coordonnées du point F , puis démontrer que la droite (EF) est parallèle à la droite (AB) .
- 6) Soit H le point de coordonnées $\left(\frac{245}{503}; \frac{315}{503}; \frac{65}{503}\right)$.
Démontrer que H est le projeté orthogonal de C sur le plan (OAB) , puis en déduire la distance du point C au plan (OAB) .