

Exercice 1

4 points

• **Affirmation 1 : VRAIE.**

Un code PIN est une liste ordonnée de 4 chiffres, chacun pouvant être choisi parmi les 10 chiffres $0, 1, \dots, 9$, avec répétitions possibles : c'est un 4-uplet de l'ensemble $\{0; 1; \dots; 9\}$, qui a 10 éléments. Leur nombre est

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10\,000.$$

• **Affirmation 2 : FAUSSE.**

La 3^e position est imposée (le chiffre 1). Il reste à remplir les positions 1, 2 et 4 avec des chiffres tous différents, différents de 1, donc choisis parmi les 9 chiffres restants : c'est un arrangement de 3 éléments parmi 9.

$$9 \times 8 \times 7 = 504 \neq 720.$$

(720 = $10 \times 9 \times 8$ correspondrait à oublier que le chiffre 1 est déjà utilisé.)

• **Affirmation 3 : FAUSSE.**

Chacune des 4 cases reçoit une couleur choisie parmi 5 : un coloriage est un 4-uplet de l'ensemble des 5 couleurs. Le nombre de coloriages est

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625 \neq 4^5 = 1\,024.$$

Même si l'on impose quatre couleurs différentes, on obtient $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ coloriages, qui n'est pas non plus 4^5 : l'affirmation est fausse dans tous les cas.

• **Affirmation 4 : FAUSSE.**

Contre-exemple : pour $x = -1$, $e^{2x+1} = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,37 < 1$.

Plus précisément, comme $1 = e^0$ et que la fonction exponentielle est strictement croissante :

$$e^{2x+1} \geq 1 \iff 2x+1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2}.$$

L'inégalité n'est vraie que pour $x \geq -\frac{1}{2}$, pas pour tout réel x .

Exercice 2

3 points

Partie A

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tous réels a et b , $e^a = e^b \iff a = b$. Ainsi :

$$\begin{aligned} e^{x^2+1} = e^{2x+5} &\iff x^2 + 1 = 2x + 5 \\ &\iff x^2 - 2x - 4 = 0. \end{aligned}$$

Discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 4 + 16 = 20 > 0$, et $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Deux solutions :

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{2} = 1 - \sqrt{5}, \quad x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}.$$

$$S = \{1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}\} \quad (\text{soit environ } -1,24 \text{ et } 3,24).$$

Vérification : $(1 + \sqrt{5})^2 + 1 = 7 + 2\sqrt{5}$ et $2(1 + \sqrt{5}) + 5 = 7 + 2\sqrt{5}$.

Partie B

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n \leq 8$ ».

Initialisation. $u_0 = 1 \leq 8$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} u_n &\leq 8 \\ \Leftrightarrow 0,75 u_n &\leq 6 && \text{(on multiplie par } 0,75 > 0) \\ \Leftrightarrow 0,75 u_n + 2 &\leq 8 && \text{(on ajoute 2)} \\ \Leftrightarrow u_{n+1} &\leq 8 && \text{(car } u_{n+1} = 0,75 u_n + 2) \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 8$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 0,75 u_n + 2 - u_n = -0,25 u_n + 2 = -0,25 (u_n - 8).$$

D'après la question 1), $u_n - 8 \leq 0$; comme $-0,25 < 0$, le produit $-0,25 (u_n - 8)$ est positif ou nul : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite (u_n) est donc croissante.

Vérification : $u_1 = 0,75 \times 1 + 2 = 2,75 \geq u_0$, puis $u_2 = 4,0625 \geq u_1$.

Exercice 3

5 points

1) Le jour de la plantation correspond à $t = 0$:

$$f(0) = \frac{120 e^0}{e^0 + 3} = \frac{120}{1 + 3} = \frac{120}{4} = 30.$$

Le jour de sa plantation, l'arbuste mesure 30 cm.

2) $f = \frac{u}{v}$ avec $u(t) = 120 e^t$, $u'(t) = 120 e^t$, $v(t) = e^t + 3$, $v'(t) = e^t$; v ne s'annule pas sur $[0; 12]$ car $e^t + 3 > 0$. Alors $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$f'(t) = \frac{120 e^t (e^t + 3) - 120 e^t \times e^t}{(e^t + 3)^2} = \frac{120 e^{2t} + 360 e^t - 120 e^{2t}}{(e^t + 3)^2} = \frac{360 e^t}{(e^t + 3)^2}.$$

3) Pour tout $t \in [0; 12]$: $360 > 0$, $e^t > 0$ et $(e^t + 3)^2 > 0$. Donc $f'(t) > 0$ sur $[0; 12]$.

- 4) La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; 12]$, avec $f(0) = 30$ et $f(12) = \frac{120e^{12}}{e^{12} + 3} \approx 119,998$.

t	0	12
$f'(t)$	+	
f	30	$\frac{120e^{12}}{e^{12} + 3}$

- 5) La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(t - 0) + f(0)$, avec

$$f'(0) = \frac{360e^0}{(e^0 + 3)^2} = \frac{360}{16} = 22,5 \quad \text{et} \quad f(0) = 30.$$

Une équation de la tangente est $y = 22,5t + 30$.

- 6) On cherche le premier instant où la hauteur atteint 1 m = 100 cm, c'est-à-dire où $f(t) = 100$.

Démarche : f est continue et strictement croissante sur $[0; 12]$, avec $f(0) = 30 < 100$ et $f(12) \approx 120 > 100$: la hauteur dépasse 100 cm une seule fois. On utilise la table de la calculatrice (fonction f , pas de 1, puis de 0,1, puis de 0,01) :

t	2	2,7	2,71	3
$f(t)$ (arrondi)	85,35	99,87	100,03	104,41

La hauteur dépasse 1 m pour t compris entre 2,70 et 2,71 mois : elle est encore inférieure à 1 m au bout de 2 mois (≈ 85 cm) et supérieure au bout de 3 mois (≈ 104 cm).

Liam devra tailler l'arbuste pendant le 3^e mois, au bout d'environ 2,7 mois.

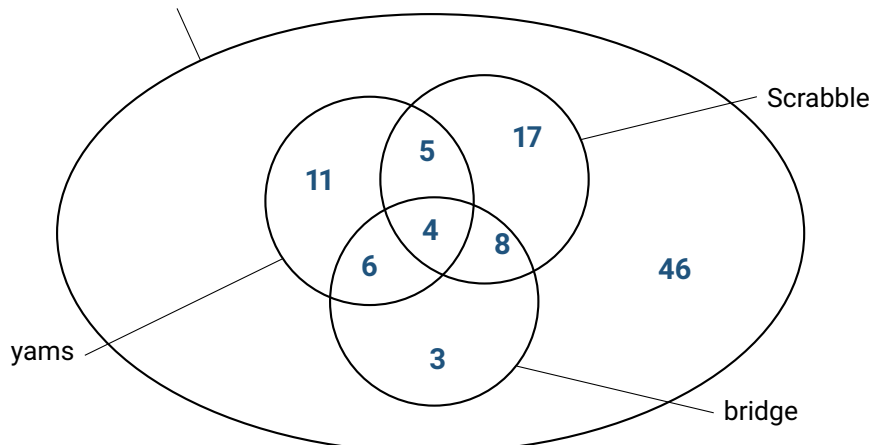
Vérification par le calcul : $f(t) = 100 \iff 120e^t = 100e^t + 300 \iff 20e^t = 300 \iff e^t = 15$, solution $t = \ln 15 \approx 2,708$ (le logarithme népérien sera vu plus tard dans l'année).

Exercice 4

3 points

- 1) a. On note S , B et Y les ensembles des seniors qui jouent respectivement au Scrabble, au bridge et au yams. On remplit le diagramme de l'intérieur vers l'extérieur :
- zone centrale (les trois jeux) : 4;
 - exactement Scrabble et bridge : $12 - 4 = 8$; exactement yams et Scrabble : $9 - 4 = 5$; exactement bridge et yams : $10 - 4 = 6$;
 - Scrabble seul : $34 - 8 - 5 - 4 = 17$; bridge seul : $21 - 8 - 6 - 4 = 3$; yams seul : $26 - 5 - 6 - 4 = 11$;
 - au moins un jeu : $17 + 3 + 11 + 8 + 5 + 6 + 4 = 54$, donc aucun des trois jeux : $100 - 54 = 46$.

seniors participant à la journée



Vérification par la formule d'inclusion-exclusion : $34 + 21 + 26 - 10 - 9 - 12 + 4 = 54$ seniors jouent à au moins un jeu.

b. Nombre de seniors qui ne jouent qu'à un seul jeu : $17 + 3 + 11 = \boxed{31}$.

c. Nombre de seniors qui jouent à exactement deux jeux : $8 + 5 + 6 = \boxed{19}$.

2) On note E l'ensemble des adolescents venus pour l'escalade et Q celui des adolescents venus pour l'équitation. 13 adolescents ne pratiquent aucun des deux sports, donc

$$\text{card}(E \cup Q) = 100 - 13 = 87.$$

Or $\text{card}(E \cup Q) = \text{card}(E) + \text{card}(Q) - \text{card}(E \cap Q)$ (les adolescents qui font les deux sports sont comptés deux fois dans $60 + 45$). D'où :

$$\text{card}(E \cap Q) = 60 + 45 - 87 = 18.$$

$\boxed{18}$ adolescents pratiqueront l'escalade et l'équitation.

Vérification : 42 font seulement de l'escalade, 27 seulement de l'équitation, 18 les deux et 13 aucun : $42 + 27 + 18 + 13 = 100$.

Exercice 5

5 points

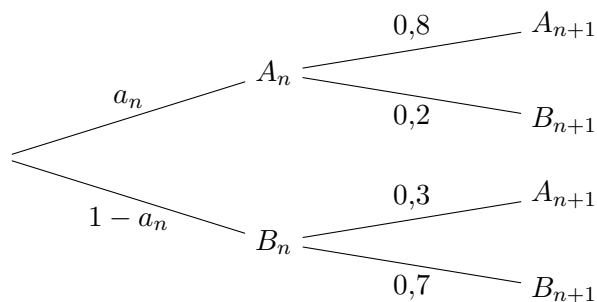
D'après l'énoncé, pour tout $n \geq 1$: $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0,8$, donc $P_{A_n}(B_{n+1}) = 0,2$; $P_{B_n}(B_{n+1}) = 0,7$, donc $P_{B_n}(A_{n+1}) = 0,3$. De plus $a_1 = 0,4$.

1) A_1 et B_1 forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} a_2 &= P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2) \\ &= 0,4 \times 0,8 + 0,6 \times 0,3 = 0,32 + 0,18, \end{aligned}$$

donc $\boxed{a_2 = 0,5}$.

2) Arbre pondéré complété ($P(B_n) = 1 - a_n$) :



3) Soit $n \geq 1$. A_n et B_n forment une partition de l'univers; par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= 0,8 a_n + 0,3 (1 - a_n) = 0,8 a_n + 0,3 - 0,3 a_n, \end{aligned}$$

soit $a_{n+1} = 0,5 a_n + 0,3$. (Vérification : $0,5 \times 0,4 + 0,3 = 0,5 = a_2$.)

4) Pour tout entier $n \geq 1$, on note $P(n)$ la propriété : « $a_n = -0,2 \times 0,5^{n-1} + 0,6$ ».

Initialisation. Pour $n = 1$: $-0,2 \times 0,5^0 + 0,6 = -0,2 + 0,6 = 0,4 = a_1$: $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} a_n &= -0,2 \times 0,5^{n-1} + 0,6 \\ \iff 0,5 a_n &= -0,2 \times 0,5^n + 0,3 && \text{(on multiplie par } 0,5 \neq 0) \\ \iff 0,5 a_n + 0,3 &= -0,2 \times 0,5^n + 0,6 && \text{(on ajoute } 0,3) \\ \iff a_{n+1} &= -0,2 \times 0,5^{(n+1)-1} + 0,6 && \text{(question 3)} \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(1)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$\text{pour tout entier } n \geq 1, a_n = -0,2 \times 0,5^{n-1} + 0,6.$$

5) La fonction part de $n = 1$ et augmente n de 1 tant que $a_n < k$; elle renvoie donc le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $a_n \geq k$. On calcule les termes (valeurs exactes) :

n	1	2	3	4	5	6
a_n	0,4	0,5	0,55	0,575	0,5875	0,59375

$a_5 = 0,5875 < 0,59$ et $a_6 = 0,59375 \geq 0,59$: l'appel `seuil(0.59)` renvoie **6**.

(Par le calcul : $a_n \geq 0,59 \iff 0,2 \times 0,5^{n-1} \leq 0,01 \iff 0,5^{n-1} \leq 0,05$, et $0,5^4 = 0,0625 > 0,05$, $0,5^5 = 0,03125 \leq 0,05$.)

Interprétation : à partir de la 6^e partie, la probabilité que la partie jouée soit de type A est supérieure ou égale à 0,59.

6) Comme $-1 < 0,5 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^{n-1} = 0$, donc par produit et somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,6 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = 1 - 0,6 = 0,4.$$

Pour un joueur qui enchaîne un très grand nombre de parties, environ 60 % des parties sont de type A et 40 % de type B : la publicité la plus vue devrait être

celle insérée au début des parties de type A.